Analyse fonctionnelle: cours fondamental B

Yulia Kuznetsova

21 janvier 2025

Cable de

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Rappel

Définition 1.1.1. *Soit A un e A e une algèbre de Banach si A e ciative) telle que $\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$ pour tous $a, b \in A$.*

Remarque : on n'obtient pas de notion plus générale en suppo la multiplication uniquement continue, ou même sé (Exercice.)

Soit A une algèbre de Banach unifère.

Définition 1.1.2. *Le spectre d'un élément $a \in A$ e*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ n'e } \}.$$

Théorème 1.1.3. *Le spectre de tout élément d'une algèbre de Banach e $\mathbb{C}$.*

Théorème 1.1.4 (Gelfand-Mazur). *Soit A une AdB unitale qui e un corps (tout élément non-nul e $A \simeq \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $a \in A$. Il existe $\lambda \in \sigma(a) \neq \emptyset$. Alors $a - \lambda \mathbf{1}$ n'e pas inversible ; par l'hy $a - \lambda = 0$, donc $a \in \mathbb{C}\mathbf{1}$. □

Définition 1.1.5. *Soit $a \in A$. Le rayon spectral de a e $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

On obtient facilement $\rho(a) \leqslant \|a\|$.

Théorème 1.1.6. *Pour tout a, la limite suivante existe et vérifie l'égalité :*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Théorème 1.1.7. *Soit $a \in A$. Pour tout polynôme p, on a*

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Démonstration. Soit $n = \deg p$. Pour tout λ on a $p(z)-\lambda = c(z-z_1)\dots(z-z_n)$ avec $c \neq 0$ et certains $z_n \in \mathbb{C}$. Alors $p(a)-\lambda = c(a-z_1)\dots(a-z_n)$; c'e inversible ssi chaque terme e $z_j \notin \sigma(a)$, $j = 1, \dots, n$. Le $z_j \in \sigma(a)$ pour un certain j. On aura alors $p(z_j) - \lambda = 0$, donc $\lambda \in p\big(\sigma(a)\big)$.

Reciproquement, $\lambda = p(z_0)$ avec $z_0 \in \sigma(a)$ fera que $p(z) - \lambda$ s'annule en z_0 donc se divise pas le facteur $z - z_0$ tel que $a - z_0$ n'e inversible ; on aura donc $p(a) - \lambda$ non-inversible et $p(z_0) \in \sigma\big(p(a)\big)$. □

(Vrai dans toute algèbre unitale, même sans norme / to

1.2 Adjonction d'unité

Si A n'e $\tilde{A} = A \oplus \mathbf{1}$ et y définir la multiplication de sorte que $\mathbf{1}$ soit l'unité :

$$(\lambda + a)(\mu + b) = \lambda\mu + \lambda a + \mu b + ab,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$. On po $\|\lambda + a\| = |\lambda| + \|a\|$, et cela en fait une algèbre de Banach :

$$\|(\lambda + a)(\mu + b)\| \leqslant |\lambda\mu| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + \|a\|\,\|b\| = \|\lambda + a\|\,\|\mu + b\|.$$

Définition 1.2.1. *Soit A une AdB non-unifère. Pour $a \in A$, on po $\sigma(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$ et $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Si A n'a pas d'unité, A e $\tilde{A}$, donc se sont jamais inversible $0 \in \sigma(a)$ pour tout $a \in A$.

Exemple 1.2.2. *Soit $A = C_0(\mathbb{R})$ avec la multiplication ponctuelle et la norme uniforme. On peut identifier l'unité extérieure avec la fonction 1 sur $\mathbb{R}$: $(\mathbf{1})(\lambda + \mathbf{f})(\mathbf{t}) = \lambda + \mathbf{f}(\mathbf{t})$. Une fonction $f - \lambda$ e elle ne s'annule pas, avec l'inverse $\tilde{g}(t) = \dfrac{1}{f(t) - \lambda}$; la limite à l'infini e $-1/\lambda$ (ce qui confirme qu'on doit avoir $\lambda \neq 0$) donc $g = \tilde{g} + 1/\lambda$ e dans A. Finalement : $\sigma(f) = f(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ et $\rho(f) = \|f\|_\infty$.*

1.3 Idéaux

Définition 1.3.1. Soit A une AdB. Un idéal de A e
vectoriel $I \subset A$ tel que $AI \subset I$ et $IA \subset I$. Un idéal e
n'e A).

Théorème 1.3.2. Soit $I \subset A$ un idéal fermé. Alors A/I avec la norme quotient e
un homomorphisme contractant.

Démonstration. On rappelle que pour $a \in A$,

$$\|a+I\| = \inf_{z \in I} \|a+z\|.$$

On sait bien que A/I e
a ensuite pour $a, b \in A$:

$$\begin{aligned}\|(a+I)(b+I)\| &= \inf_{z \in I} \|ab+z\| \leqslant \inf_{z,w \in I} \|ab+aw+zb+zw\| \\ &= \inf_{z,w \in I} \|(a+z)(b+w)\| \leqslant \|a+I\| \, \|b+I\|.\end{aligned}$$

□

Pro 1.3.3. Soit H un e
$K(H)$ e $B(H)$.

(à démontrer plus tard dans le cours.)

Pro 1.3.4. Soient A, B deux AdB et $\varphi : A \to B$ un homomorphisme continu. Alors pour tout idéal $J \subset B$ son image inverse $I = \varphi^{-1}(J)$ e A.

Démonstration. C'e $z \in I$ et $a \in A$, alors $\varphi(az) = \varphi(a)\varphi(z) \in \varphi(a)J \subset J$ donc $az \in I$, de même $za \in I$. Remarquons aussi que si J e I aussi. □

Théorème 1.3.5. Soit I un idéal de A. Alors son adhérence $\bar{I}$ e
un idéal aussi.

Démonstration. Tout $z \in \bar{I}$ e $z = \lim z_n$ avec $z_n \in I$; on a alors pour tout $a \in A$

$$az = \lim az_n \in \bar{I} \text{ et } za = \lim z_n a \in \bar{I}.$$

□

Exemple 1.3.6. *Dans* $A = C_0(\mathbb{R})$, *toute partie* $K \subset \mathbb{R}$ *définit un idéal* $I_K = \{f \in A : f|_K = 0\}$. *Si* $K = \{x\}$ *e* I_K *a la codimension 1 et e*

Le

voudrais pouvoir passer aux idéaux fermé

soient de Banach (sé

Exemple 1.3.7. *Dans* $A = C_0(\mathbb{R})$, *soit* $I = \{f \in A : \operatorname{supp} f$ *e* $\}$. *Alors* I *e*

—— (fin du cours 1) ——

1.4 Idéaux modulaire

Définition 1.4.1. *Soit* A *une algèbre de Banach. Un idéal* $I \subset A$ *e dit modulaire si* A/I *e*

modulaire : un élément $u \in A$ *tel que*

$$a - ua, a - au \text{ sont dans } I$$

pour tout $a \in A$.

On voit que dans ce cas $a + I = ua + I = au + I$. On peut dire aussi que u e I.

Exemple 1.4.2. *Soit* $A = C_0(\mathbb{R})$ *et soit* $K \subset \mathbb{R}$ *compact. Alors* I_K *e modulaire, et toute fonction* $u \in A$ *égale à 1 sur* K *peut être prise pour une unité modulaire.*

Si K *n'e* I_K *n'e*

modulaire u aurait été égale à 1 sur K*).*

Exercice 1.4.3. *Soit* $A = \mathcal{A}(\mathbb{D})$ *l'algèbre de disque : c'e fonctions holomorphe* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *continue* $\overline{\mathbb{D}}$. *On la munit de la norme uniforme et de la multiplication simple.*

Considérons $A_0 = \{f \in A : f(0) = 0\}$. *C'e*

Banach (un idéal dans A). Montrer que $I = \{f \in A_0 : f'(0) = 0\}$ *e idéal maximal non-modulaire dans* A_0.

Pro 1.4.4. *Si* $I \subset A$ *e*

son adhérence $\bar{I}$ *e* I *e*

fermé.

Démonstration. Soit u une unité modulo I, et soit $B = B(u,1)$ la boule unité centrée en u. Montrons que $B \cap I = \emptyset$.

Si $b \in B$, alors $\|b-u\| < 1$ donc $\|(b+I)-(u+I)\| < 1$. L'élément $b+I$ e A/I, d'où en particulier $b \notin I$.

On conclut alors que $u \notin \bar{I}$; mais $\bar{I}$ e

Finalement, si I e

$\bar{I} \supset I$ donc fermé. □

Pro 1.4.5. *Tout idéal modulaire pro $I \subset A$ e dans un idéal modulaire maximal (fermé).*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ la famille de tous le I. Si $u \in A$ e I, elle l'e $J \in \mathcal{F}$, et en particulier $u \notin J$. Si $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ ordonné par rapport à l'inclusion, alors $\cup\mathcal{C}$ e pas u, donc $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{F}$. On e existe donc un idéal $J \in \mathcal{F}$ maximal par rapport à l'inclusion. Il e néce A. □

1.5 Algèbre

1.5.1 Idéaux maximaux et le spectre

Soit A une AdB commutative.

Pro 1.5.1. *Si $I \subset A$ e A/I e $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Notons $B = A/I$. Soit $b = a + I \in B$. S'il n'e inversible alors l'idéal $bB = Bb$ e mais $0 \neq b \in bB$. Son image inverse J sous l'application quotient e un idéal dans A contenant I ; il e I ce qui e une contradiction.

Par le théorème de Gelfand-Mazur, on conclut maintenant que $A/I \simeq \mathbb{C}$. □

On peut donc considérer l'application quotient $\varphi : A \to A/\mathbb{C}$ comme étant de A dans $\mathbb{C}$, et c'e

(fin du cours 2)

Définition 1.5.2. Un caractère d'une AdB A e
non-nul de A dans $\mathbb{C}$. L'ensemble de tous le $\Omega(A)$
et appelé le spectre de A.

Corollaire 1.5.3. Tout idéal maximal modulaire d'une AdB commu-
tative e $I \mapsto \varphi_I$ e
bijection entre l'ensemble de $\Omega(A)$.

Si A e $\Omega(A)$
se décrit comme l'ensemble de
non-vide : l'idéal $\{0\}$ e

Remarque 1.5.4. Sans unité, le spectre peut être vide : on définit une multiplication nulle sur A non nulle, alors si χ e
phisme de A dans $\mathbb{C}$, on a $\chi(a)^2 = \chi(a^2) = 0$ pour tout $a \in A$; la seule
po $\chi \equiv 0$.

Pro 1.5.5. Soit A unifère, alors $\chi(1) = 1$ pour tout $\chi \in \Omega(A)$.

Démonstration. Il existe $a \in A$ tel que $\chi(a) \neq 0$; alors $\chi(1)\chi(a) = \chi(a)$ d'où $\chi(1) = 1$. □

Pro 1.5.6. Soit A non-unifère. Alors $\Omega(\tilde{A}) = \Omega(A) \cup \{\chi_\infty\}$ où $\chi_\infty|_A = 0$ et $\chi_\infty(1) = 1$.

Démonstration. On vérifie d'abord que χ_∞ e
$\chi_\infty(a + \lambda) = \lambda$ donc c'e $\tilde{A} \to \tilde{A}/A \simeq \mathbb{C}$, qui e
un homomorphisme car A e $\tilde{A}$.

On peut prolonger tout caractère $\chi \in \Omega(A)$ à $\tilde{A}$ en po $\tilde{\chi}(a+\lambda) = \chi(a)+\lambda$; un calcul simple montre que c'e
cation $\chi \mapsto \tilde{\chi}$, $\Omega(A) \to \Omega(\tilde{A})$ e
si $\varphi \in \Omega(\tilde{A})$, alors il e $\chi = \varphi|_A$ car $\varphi(1) = 1$; en plus,
cette re A dans $\mathbb{C}$. S'il e
alors $\varphi = \tilde{\chi}$; s'il e $\varphi = \chi_\infty$. □

Pro 1.5.7. Soit K un e $A = C(K)$
(avec la norme uniforme et la multiplication ponctuelle). Alors $\Omega(K)$
s'identifie à K par la corre $\chi_x(f) = f(x)$, $x \in K$, $f \in A$.

Démonstration. Pour tout $x \in K$ l'application χ_x e
non-nul.

Soit maintenant $I \subset A$ un idéal. Si pour tout $x \in K$ il existe $f_x \in I$ qui ne s'annule pas en x, alors f_x ne s'annule pas sur un ouvert

V_x contenant x ; on choisit un recouvrement fini $\{V_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$ de K, alors la fonction $f = \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}|^2$ e I et ne s'annule pas sur K. Il en suit que $1 = f \cdot \dfrac{1}{f} \in I$ et alors $I = A$. Tout idéal pro I doit avoir alors un zéro commun $x \in K$, et $I \subset \ker \chi_x$. Mais si I e $I = \chi_x$; nous avons montré que la corre $x \mapsto \chi_x$ e $\square$

Corollaire 1.5.8. *Soit X un e qu'on peut le compactifier en ajoutant un point, $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ e le compactifié d'Alexandroff. Toute fonction continue f sur $\tilde{X}$ a la forme $f = f_0 + f(\infty)\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ e $f_0(\infty) = 0$; la re f_0 sur X e $C_0(X)$. Si on note $A = C_0(X)$, on peut identifier alors $C(\tilde{X})$ avec $\tilde{A}$. (L'isomorphisme naturel n'e pas isométrique, mais il l'e A.) Par la de $\Omega(A) = X \cup \{\chi_\infty\} \simeq \tilde{X}$. On affinera plus tard cette identification en prenant en compte le*

L'importance du spectre e

Théorème 1.5.9. *Soit A une AdB commutative.*

- *Si A e $a \in A$*

$$\sigma(a) = \{\chi(a) : \chi \in \Omega(A)\};$$

  en particulier, a e $\chi(a) \neq 0$ pour tout $\chi \in \Omega(A)$.

- *Si A n'a pas d'unité, alors pour tout $a \in A$*

$$\sigma(a) = \{\chi(a) : \chi \in \Omega(A)\} \cup \{0\}.$$

Démonstration. Suppo A e $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\sigma(a - \lambda) = \sigma(a) - \lambda$, alors il faut juste montrer la deuxième assertion. Si a e $\chi(a)\chi(a^{-1}) = \chi(1) = 1$ pour tout $\chi \in \Omega(A)$, donc $\chi(a) \neq 0$. Réciproquement, si aucun caractère ne s'annule sur a, alors l'idéal $Aa = Aa$ engendré par a n'e idéal maximal (qui se décrivent comme le (en pré maximal, donc $Aa = A$. Il en suit que a e

Soit maintenant A non-unifère. Pour tout $a \in A$ le spectre e $\sigma(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a) = \{\chi(a) : \chi \in \Omega(\tilde{A})\}$. C'e $\{\chi(a) : \chi \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$ car $\chi_\infty(a) = 0$. $\square$

Corollaire 1.5.10. *Pour tout* $\chi \in \Omega(A)$ *on a* $\|\chi\| \leqslant 1$.

Démonstration. Pour chaque $a \in A$ et $\chi \in \Omega(A)$ nous avons $\chi(a) \in \sigma(a)$, donc $|\chi(a)| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\|$. □

1.5.2 La to de Gelfand

Définition 1.5.11. *Par le précédent,* $\Omega(A)$ *e* *unité de l'e* A^*. *On muni* $\Omega(A)$ *de la to* *la to* A^*.

(fin du cours 3)

Pro 1.5.12. $\Omega(A)$ *e* *si* A *e* A *e* $\Omega(\tilde{A})$ *e* *compactifié d'Alexandroff de* $\Omega(A)$.

Démonstration. La sé A^* en to
Par le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité B de A^* e
blement compacte ; montrons que $\Omega(A)$ e
Soit $\varphi \in B$ dans son adhérence ; pour tout $a, b \in A$ et tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir alors $\varphi \in \Omega(A)$ tel que $|\varphi(a) - \chi(a)| < \varepsilon$, $|\varphi(b) - \chi(b)| < \varepsilon$ et $|\varphi(ab) - \chi(ab)| < \varepsilon$. On majore ensuite

$$|\varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b)| \leqslant |\varphi(ab) - \chi(ab)| + |\chi(a)\big(\chi(b) - \varphi(b)\big)| + |\big(\chi(a) - \varphi(a)\big)\varphi(b)| < 3\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure facilement que φ e
Dans le cas général, on peut obtenir $\varphi = 0$, on a montré alors que $\Omega(A) \cup \{0\}$ e A e $\Omega(A)$ e
dans l'ensemble faiblement fermé $\{\varphi : \varphi(1) = 1\}$, donc $\Omega(A)$ e
lui-même.

Si A e $\chi \in \Omega(A)$ admet un point $a \in A$ tel que $\chi(a) \neq 0$. L'ensemble $F = \{\varphi \in B : |\varphi(a)| \geqslant |\chi(a)|/2\}$ e
B donc compact ; l'intersection $V = F \cap \Omega(A)$ e χ,
mais aussi il e $0 \notin V$ et donc $V = F \cap \big(\Omega(A) \cup \{0\}\big)$ et le dernier ensemble e $\Omega(A)$ e
compact.

Si $0 \in \overline{\Omega(A)}$ (ce n'e A n'a pas d'unité, par exemple si $\dim A < \infty$), alors le $\Omega(A)$ ont pour base la famille

$$U_{\varepsilon,a_1,\dots,a_n} = \{\varphi \in \Omega(A) : |\varphi(a_k)| < \varepsilon, k = 1,\dots,n\}.$$

Ce sont le $\Omega(A) \cup \{0\}$ donc de compact (ne contenant pas 0), alors la to $\Omega(A) \cup \{0\}$ e como □

Exemple 1.5.13. *Voici l'un de gèbre (w_n) une suite de nombre*

$$A = \ell^1(\mathbb{Z}, w) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|x\| = \sum_n |x_n| w_n < \infty\}.$$

C'e $\ell^1(Z)$. On va le considérer avec la convolution : $(x*y)_n = \sum_m x_m y_{n-m}$. Pour qu'elle soit bien définie, il faut que $w_{n+m} \leqslant w_n w_m$; dans ce cas

$$\|xy\| \leqslant \sum_{n,m} w_n |x_m y_{n-m}| \leqslant \sum_m w_m |x_m| \big(\sum_n w_{n-m} |y_{n-m}|\big) = \|x\|\,\|y\|.$$

L'algèbre A po e à coordonnée $e_0 = 1$, $e_n = 0$ si $n \neq 0$.

Cherchons maintenant son spectre. On peut noter e_n la suite à coordonnée n et 0 sinon ; leur convolutions sont $e_n * e_m = e_{n+m}$, et leur envelo A. Tout caractère χ e déterminé alors par sa valeur sur e_n, qui e $\chi(e_1)^n$. Notons $z = \chi(e_1)$. Cela donne une fonctionnelle bornée — et on sait que la norme de tout caractère e x on peut majorer

$$|\chi(x)| = |\sum_n x_n z^n| \leqslant \sum_n |x_n| w_n,$$

alors ssi $|z^n| \leqslant w_n$ pour tout n (en po $x = e_n$), ou encore $|z| \leqslant w_n^{1/n}$ pour n po $|z| \geqslant w_n^{1/n}$ pour n négatif. En particulier, si $w_n = 1$ pour tout n comme dans le cas classique de ℓ^1, alors la condition e $|z| = 1$.

En général, la sous-multiplicativité de w implique que $r_+ = \varliminf_{n\to+\infty} w_n^{1/n}$ et $r_- = \varlimsup_{n\to-\infty} w_n^{1/n}$ sont finie z vérifie alors le de $r_- \leqslant |z| \leqslant r_+$. C'e $\mathbb{C}$, qui peut être non-trivial ou bien se réduire à un cercle.

Pour ℓ^1, on obtient un théorème suivant (démontré initialement par N. Wiener par de $f \in C(\mathbb{T})$

a la série de Fourier normalement convergente et ne s'annule pas, alors la série de Fourier de $1/f$ e

——— (fin du cours 4) ———

Remarque 1.5.14. Revenons à l'exemple 1.5.7 de l'algèbre $C(K)$. On a vu que se K.
Soit τ la to K ; quelle e τ' induite par l'identification avec $\Omega(A)$? Pour tout $f \in A$ et tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(U)$ e τ', il faut remarquer que $f(x) = \chi_x(f)$ donc c'e
la to
l'application identité de (K, τ) dans (K, τ') e τ' e
engendrée par ce
continue entre deux compact $\tau = \tau'$.

Si X e $A = C_0(X)$, alors $\tilde{A}$ e $C(\tilde{X})$ où $\tilde{X}$ e X. Son spectre $\Omega(\tilde{A})$ e $\tilde{X}$, mais aussi au compactifié de $\Omega(A)$, avec le $\Omega(A)$ e
X.

Exercice 1.5.15. Soit $A(\bar{\mathbb{D}})$ l'algèbre de
$\mathbb{D}$ et continue $\bar{\mathbb{D}}$, alors son spectre e $\bar{\mathbb{D}}$.

Théorème 1.5.16. Soit A une AdB commutative et $\Omega = \Omega(A)$ son spectre. Alors :

- Pour tout $a \in A$, l'application $\widehat{a} : x \mapsto x(a)$ définit une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$, et $\|\widehat{a}\|_\infty = \rho(a) \leqslant \|a\|$;
- L'application $a \mapsto \widehat{a}$ e
- L'e $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$ e $C_0(\Omega)$.

L'application $a \mapsto \widehat{a}$ e

Démonstration. En l'e $\widehat{a}$ e
par la définition de la to $\|a\|$ car
le Ω e A^*, ensutie $\widehat{ab}(x) = \widehat{a}(x)\widehat{b}(x)$
car x e Ω n'e
tout $a \in A$ et $\varepsilon > 0$ l'ensemble $U = \{\chi \in \Omega(A) \cup \{0\} : |\chi(a)| < \varepsilon\}$ e
voisinage ouvert de 0, et son complément $K = \Omega \setminus U$ e
dans Ω (hors lequel $|\widehat{a}| < \varepsilon$). $\square$

Exemple 1.5.17. *(un exemple ty* $A = L^1(\mathbb{R})$ *a pour spectre* $\mathbb{R}$*, et la transformée de Gelfand e*
Fourier. Son image e $C_0(\mathbb{R})$.

La transformée de Gelfand n'e
l'algèbre à multiplication nulle). Le noyau de la transformée de Gelfand
e A. Si le radical e A e

Dans la règle, la transformée n'e
le montre l'exemple de $\ell^1 \to C(\mathbb{T})$.

Exercice 1.5.18. *Soit* $T \in M_n(\mathbb{C})$ *une matrice nil* A *l'algèbre unifère (de dimension finie) engendrée par* T*, avec la norme usuelle matricielle. Alors le radical de* A *e* A_1 *de* $\{T^n : n \geqslant 1\}$*, et donc de co-dimension 1 dans* A.

Preuve : si χ *e* $(\chi(T))^m = 0$ *où* m *e*
$T^m = 0$. *Il en suit* $\chi(T) = 0$*, donc* χ *e* A_1.

Chapitre 2

C^*-algèbre

2.1 Définitions, exemple

2.1.1 $*$-algèbre C^*-algèbre

On commence par parler de l'involution :

Définition 2.1.1. Soit A une algèbre complexe. Une involution sur A e $a \mapsto a^*$ telle que

- $\star$ $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ (antilinéaire) ;
- $\star$ $a^{**} = a$;
- $\star$ $(ab)^* = b^* a^*$

pour tout $a, b \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Une algèbre de Banach e $*$-algèbre de Banach si elle e munie d'une involution telle que $\|a^*\| = \|a\|$ et, dans le cas unifère, $\|1\| = 1$.

Exemple 2.1.2. 1. La conjugaison sur $A = \mathbb{C}$ e plus simple.

2. Soit H un e $A = B(H)$ et a^* l'o de $a \in A$. Alors c'e

3. Sur $A = C(X)$ et se e

Toute $*$-algèbre

Pro 2.1.3. Si A e $*$-algèbre, alors son involution se prolonge sur $\tilde{A}$ en po $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$. Si A e $*$-algèbre de

Banach, alors $\tilde{A}$ l'e A et B sont de $*$-algèbre $\varphi : A \to B$ un $*$-homomorphisme, alors il se prolonge à un $*$-homomorphisme de $\tilde{A}$ dans $\tilde{B}$ en po $\varphi(1) = 1$.

Démonstration. Le □

Définition 2.1.4. Soit A une $*$-algèbre. On dit qu'un élément $a \in A$ e

- ⋆ autoadjoint (ou hermitien) si $a = a^*$;
- ⋆ normal si $aa^* = a^*a$;
- ⋆ unitaire si $aa^* = a^*a = 1$;
- ⋆ une pro $a = a^* = a^2$.

Exercice 2.1.5. Soit H un e priété $p = p^* = p^2$ pour $p \in B(H)$ e p e pro $E \subset H$.

Dans une $*$-algèbre de Banach, on a toujours $\|a^*a\| \leqslant \|a\|^2$ pour tout a. Le fait d'avoir l'égalité e la suite.

Définition 2.1.6. Une C^*-algèbre e $*$-algèbre de Banach A telle que

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

pour tout $a \in A$.

Remarque 2.1.7. On pourrait l'écrire avec aa^* à la place et obtenir la même classe d'algèbre $b = a^*$ et remarquer que $\|b\| = \|a\|$).

Exemple 2.1.8.
- ⋆ $C_b(X)$ sur un e X, $C_0(X)$ sur X localement compact ou $C(K)$ sur K compact ;
- ⋆ $L^\infty(X)$ sur un e $(X, \mu, \mathcal{F})$;
- ⋆ $B(H)$, l'algèbre de $K(H)$.
- ⋆ L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ admet l'involution naturelle

$$f^*(t) = \overline{f(-t)},$$

mais elle n'e C^*-algèbre avec. La preuve suivra d'un théorème à venir.

——— (fin du cours 5) ———

Énonçons une pro

Pro 2.1.9. Si A e C^*-algèbre et $B \subset A$ une sous-algèbre fermée auto-adjointe, alors B e C^*-algèbre.

2.1.2 Pro

Soit A une $*$-algèbre.

Exercice 2.1.10. Montrer que

- $\star$ $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ *pour tout* $a \in A$ *;*
- $\star$ $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$ *pour* $a \in A$ *inversible.*

(Pour le deuxième : $a - \lambda = a\lambda(\lambda^{-1} - a^{-1}) = (\lambda^{-1} - a^{-1})a\lambda$, donc $a - \lambda$ et $\lambda^{-1} - a^{-1}$ sont inversible

Soit A une algèbre de Banach unifère. On peut définir l'ex $\exp(a) = e^a$ de tout $a \in A$, et on sait que $e^{a+b} = e^a e^b$ si a et b commutent.

Pro 2.1.11. $\sigma(e^a) \supset \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$ *pour tout* $a \in A$.

Démonstration. Pour tout λ, on a

$$e^a - e^\lambda = \left(e^{a-\lambda} - 1\right) e^\lambda = (a - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-\lambda)^{n-1}}{n!} e^\lambda,$$

avec deux élément $e^a - e^\lambda$ e
alors $a - \lambda$ l'e □

En réalité, le
aurait be

On suppo A e C^*-algèbre unifère.

Pro 2.1.12. Si u e $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.

Démonstration. Le $uu^* = u^*u = 1$ impliquent que $\|u\| = 1$ donc $\sigma(u) \subset \bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Aussi, $u^* = u^{-1}$ e
$\sigma(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\} \subset \bar{\mathbb{D}}$. Il en suit $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$. □

2.1.3 Élément

S'il n'e A e C^*-algèbre.

Pro 2.1.13. Si $a \in A$ e $\rho(a) = \|a\|$.

Démonstration. On sait que

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n}.$$

Pour chaque $n \geqslant 1$, on a $\|a^{2^{n+1}}\| = \|(a^*)^{2^n} a^{2^n}\| = \|a^{2^n}\|^2$, donc (par récurrence) $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. La formule en suit immédiatement. □

Corollaire 2.1.14. *Toute $*$-algèbre admet au plus une norme qui en fait une C^*-algèbre.*

Démonstration. Le spectre d'un élément ne dé

la norme. Si une norme d'une C^*-algèbre existe sur A, on a $\|a\| = \rho(a)$ pour a auto-adjoint. Mais pour tout a, l'élément a^*a e

adjoint, et $\|a\| = \|a^*a\|^{1/2}$. La norme e

partout. □

Pro 2.1.15. *Soit A une C^*-algèbre sans unité. Alors sur $\tilde{A}$ il existe une norme de C^*-algèbre.*

Démonstration. Pour $\tilde{a} = a + \lambda \in \tilde{A}$, avec $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère l'o $L_{\tilde{a}} : b \mapsto \tilde{a}b$ sur A. Son image e

A car c'e $\tilde{A}$. Pour $a \in A$ non-nul, on a évidemment $\|L_a\| \leqslant \|a\|$, mais aussi

$$\|L_a\| \geqslant \|L_a(a^*)\|/\|a\| = \|aa^*\|/\|a\| = \|a\|,$$

donc $\|L_a\| = \|a\|$. En général, $p(\tilde{a}) = \|L_{\tilde{a}}\|$ e $\tilde{A}$

telle que $p(\tilde{a}\tilde{b}) \leqslant p(\tilde{a})p(\tilde{b})$.

Montrons que p e

il existe $\tilde{a} = a + \lambda$ tel que $p(a) = 0$. On a néce $\lambda \neq 0$, alors pour tout $b \in A$ on a $ab + \lambda b = 0$ donc $b = (-a/\lambda)b$. En passant aux adjoint $b^* = (-a^*/\bar{\lambda})b^*$ pour tout $b \in A$. L'algèbre A admet alors de

qui contredit l'hy

Il re p vérifie l'égalité $p(\tilde{a}^*\tilde{a}) = p(\tilde{a})^2$, et il suffit de démontrer que $p(\tilde{a}^*\tilde{a}) \geqslant p(\tilde{a})^2$. On a

$$p(\tilde{a}^*\tilde{a}) = \sup_{\|b\|\leqslant 1} \|\tilde{a}^*\tilde{a}b\| \geqslant \sup_{\|b\|\leqslant 1} \|b^*\tilde{a}^*\tilde{a}b\| = \sup_{\|b\|\leqslant 1} \|(\tilde{a}b)^*\tilde{a}b\|.$$

Comme $\tilde{a}b \in A$, on peut continuer par

$$p(\tilde{a}^*\tilde{a}) \geqslant \sup_{\|b\|\leqslant 1} \|\tilde{a}b\|^2 = p(\tilde{a})^2.$$

□

Nous avons la pro

Pro 2.1.16. *Tout élément $a \in A$ s'écrit d'une façon unique comme $a = a_1 + ia_2$ avec a_1, a_2 hermitiens. Ex* $a_1 = \dfrac{a+a^*}{2}$ *et $a_2 = \dfrac{a-a^*}{2i}$.*

——— (fin du cours 6) ———

Pro 2.1.17. *Tout $*$-homomorphisme entre de C^*-algèbre e $*$-isomorphisme e*

Démonstration. Soit A et B deux C^*-algèbre $\varphi : A \to B$ un $*$-homomorphisme. On peut l'étendre a un $*$-homomorpshisme de $\tilde{A}$ dans $\tilde{B}$ en po $\varphi(1) = 1$. On vérifie que $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$ pour tout $a \in A$; il en suit $\rho(\varphi(a)) \leqslant \rho(a)$. Mais ensuite, pour tout a

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\big(\varphi(a)\big)^*\varphi(a)\| = \rho\big(\varphi(a^*a)\big) \leqslant \rho(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

donc φ e

Si φ e $*$-isomorphisme, alors φ^{-1} l'e étant contractant □

Corollaire 2.1.18. *Si A et B sont de C^*-algèbre $\varphi : A \to B$ un -homomorphisme unital, alors*

Pro 2.1.19. *Si a e* $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. L'élément $b = \exp(ia)$ e verse e $\exp(-ia)$. Par conséquence, $\sigma(b) \subset \mathbb{T}$. Par Pro $\sigma(b) \supset \{e^{i\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$, il en suit $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. □

2.1.4 Le spectre dans de

Exemple 2.1.20. *La relation entre le et dans sa sous-algèbre peut être vue sur l'exemple suivant : soit $A = C(\mathbb{T})$ et B la sous-algèbre de $\mathbb{T}$ de holomorphe $\bar{\mathbb{D}}$. Alors le spectre de $f(z) = z$ dans A e $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, mais dans B il e $f(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$. À noter que le premier a un «trou» : son complément n'e*

On sait bien l'ensemble $Inv(A)$ de algèbre de Banach A, et l'application $a \mapsto a^{-1}$ e $Inv(A)$.

[Si $a \in Inv(A)$ et $\|h\| < 1/\|a^{-1}\|$, alors $a - h$ e
e

$$(a-h)^{-1} = \big((1-ha^{-1})a\big)^{-1} = a^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ha^{-1}\right)^{n}.$$

On en déduit aussi que

$$\|a^{-1} - (a-h)^{-1}\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|h\|^{n} \|a^{-1}\|^{n+1},$$

ce qui e $2\|h\|\,\|a^{-1}\|$ si $\|h\| < (2\|a^{-1}\|)^{-1}$.]

Théorème 2.1.21. *Soit A une algèbre de Banach unifère et B sa sous-algèbre fermée contenant 1. Alors :*

1. $Inv(B)$ e $B \cap Inv(A)$;
2. pour tout $b \in B$, on a
$$\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b), \qquad \partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b);$$
3. si $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ e $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Démonstration. 1. $Inv(B)$ e B, donc dans $B \cap Inv(A)$ aussi. Montrons qu'il e (b_n) une suite dans $Inv(B)$ convergente vers $b \in Inv(A)$. On a alors $b_n^{-1} \to b^{-1}$ dans A, d'où $b^{-1} \in B$.

2. La première inclusion e $b - \lambda$ e
B, il l'e A, d'où $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$.
La deuxième montre que tous le
c'e $\sigma_B(a)$ mais pas dans $\sigma_A(a)$, sont
de $\sigma_B(a)$ (à noter, le
donc contiennent leur frontière). Suppo $\lambda \in \partial\sigma_B(b) \setminus \partial\sigma_A(b)$. Comme $\lambda \in \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)} \subset \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)}$, nous avons forcément $\lambda \notin \overline{\sigma_A(b)} = \sigma_A(b)$, et donc $b - \lambda$ e A. Par 1., il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(b-\lambda, \varepsilon) \cap Inv(B) = \emptyset$, et donc $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ implique que $b - \mu$ n'e B, c'e $\mu \in \sigma_B(b)$. Mais par l'hy λ n'e
$\sigma_B(b)$. Cette contradiction montre la deuxième inclusion.

3. Dans $U = \mathbb{C}\setminus\sigma_A(b)$, l'ensemble $E = \sigma_B(b) \cap U$ e
Mais il e $\lambda \in E$ e

$\sigma_B(b)$, alors il e E avec un disque ouvert ; sinon il serait dans $\partial\sigma_B(b)$ mais par 2. on aurait $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$ ce qui n'e $U = E$ ou $E = \emptyset$. Comme E e U ne l'e $E = \emptyset$ et alors $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

□

(fin du cours 7)

Ce problème ne se po C^*-algèbre

Pro 2.1.22. *Soit A une C^*-algèbre unifère et B son $*$-sous-algèbre fermée contenant 1. Alors pour tout $b \in B$ on a $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.*

Démonstration. Si $b = b^*$, son spectre e le 3. du Théorème 2.1.21.

Soit maintenant $b \in B$ quelconque. S'il e A, d'inverse a, alors

$$bb^*a^*a = b(ab)^*a = ba = 1,$$

et en passant aux adjoint $a^*abb^* = 1$, donc bb^* e A. Étant auto-adjoint, il e B, d'inverse c. Mais de l'égalité $bb^*c = 1 = ba$ il suit $b^*c = a$ (dans A a priori), d'où $a \in B$ et b e B. L'égalité de □

A

Pro 2.1.23. *Si A et B sont de C^*-algèbre $A \times B$ aussi, avec la norme $\|(a,b)\| = \max(\|a\|\,\|b\|)$ et l'involution $(a,b)^* = (a^*, b^*)$, $a \in A$, $b \in B$.*

Démonstration. Il e (à rappeler, $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$). On vérifie l'égalité C^* :

$$\|(a,b)^*(a,b)\| = \|(a^*a, b^*b)\| = \max(\|a\|^2, \|b\|^2) = \max(\|a\|,\|b\|)^2 = \|(a,b)\|^2.$$

□

Pro 2.1.24. *Soit A une C^*-algèbre unifère, alors $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ admet une norme de C^*-algèbre.*

Démonstration. Soit e l'unité de A et $1 \in \tilde{A}$ l'unité ajoutée. Le sous-e $\mathbb{C}(1-e)$ e $\tilde{A}$: on a $(1-e)^2 = 1-e$ et $a(1-e) = (1-e)a = 0$ pour tout $a \in A$. Algèbriquement, $\tilde{A} \simeq$

$A \times \mathbb{C}(1-e)$: on po $\varphi(a+\lambda) = (a+\lambda e, \lambda(1-e))$, c'e
linéaire, et on vérifie que c'e

$$\begin{aligned}
\varphi\big((a+\lambda)(b+\mu)\big) &= \varphi(ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu) \\
&= (ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu e, \lambda\mu(1-e)), \\
\varphi(a+\lambda)\varphi(b+\mu) &= (a+\lambda e, \lambda(1-e)) \cdot (b+\mu e, \mu(1-e)) \\
&= (ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu e, \lambda\mu(1-e)).
\end{aligned}$$

Sur $A \times \mathbb{C}(1-e)$, il existe une norme de C^*-algèbre. On peut donc po $\|a+\lambda\| := \|\varphi(a+\lambda)\|$; c'e C^*-norme sur $\tilde{A}$, et elle pré norme initiale sur A car $\varphi(a) = (a, 0)$ pour $a \in A$. □

Corollaire 2.1.25. *Tout $*$-homomorphisme entre de C^*-algèbre contractant. Tout $*$-isomorphisme e*

Démonstration. On peut étendre $\varphi : A \to B$ à un homomorphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ en po $\tilde{\varphi}(1) = 1$, c'e $*$-homomorphisme, et il e $\tilde{\varphi}$ e
φ aussi. Le cas d'un isomorphisme e □

2.2 C^*-algèbre calcul fonctionnel continu

On vérifie facilement le fait suivant :

Pro 2.2.1. *Une -sous-algèbre fermée d'une C^*-algèbre e aussi une C^*-algèbre.*

Définition 2.2.2. *Soit A une C^*-algèbre et $S \subset A$. L'adhérence de l'algèbre (unitale si A l'e S e C^*-algèbre qu'on note $C^*(S)$. Si $S = \{a\}$ e A, alors on note également $C^*(a) = C^*(\{a\})$.*

Théorème 2.2.3. *Si A e C^*-algèbre et χ son caractère, alors $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ pour tout $a \in A$.*

Démonstration. On peut suppo A e
χ si be $a \in A$ le nombre $\chi(a)$ appartient au spectre de a.

Soit $a \in A$ et $a = b + ic$ avec b, c auto-adjoint $\chi(b) \in \sigma(b) \subset \mathbb{R}$, et de même $\chi(c) \in \mathbb{R}$. Donc

$$\chi(a^*) = \chi(b - ic) = \chi(b) - i\chi(c) = \overline{\chi(a)}.$$

□

Théorème 2.2.4. *Soit A une C^*-algèbre commutative et Ω son spectre. Alors la transformée de Gelfand e $*$-isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Nous venons de montrer que la transformée de Gelfand $T : A \to C_0(\Omega)$ e

que c'e $*$-homomorphisme. De plus, pour tout $a \in A$ on a

$$\|T(a)\|_\infty = \|\overline{T(a)}T(a)\|_\infty^{1/2} = \|T(a^*a)\|_\infty^{1/2} = \rho(a^*a)^{1/2} = \|a^*a\|^{1/2} = \|a\|.$$

□

Théorème 2.2.5 (Calcul fonctionnel continu d'un o . *Notons pas z la fonction $t \mapsto t$ sur $\mathbb{C}$. Soit A unifère et $a \in A$ normal. Alors il existe l'unique -isomorphisme $\varphi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ tel que $\varphi_a(z) = a$. On notera aussi $f(a) = \varphi_a(f)$ pour $f \in C(\sigma(a))$.*

Pour tout $f \in C(\sigma(a))$, on a

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Démonstration. Par l'hy $aa^* = a^*a$, alors $C^*(a)$ e

tive. Par Théorème 2.2.4, elle e $C(\Omega)$

où Ω e $\Omega = \sigma(a)$, et notons que le spectre

de a e A et dans $C^*(a)$.

——— (fin du cours 8) ———

Pour $\chi \in \Omega$, on po $\psi(\chi) = \chi(a)$. On a $\sigma_A(a) = \sigma_{C^*(a)}(a) = \{\chi(a) : \chi \in \Omega\}$, donc ψ e

Si $\chi_1(a) = \chi_2(a)$, alors χ_1 e χ_2 sur l'e

en A et a^*, donc par continuité sur $C^*(a)$; il en suit que ψ e

Enfin, il e $\chi \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\psi^{-1}\big(B(\psi(\chi), \varepsilon)\big) &= \{\chi' \in \Omega : |\psi(\chi') - \psi(\chi)| < \varepsilon\} \\ &= \{\chi' \in \Omega : |\chi'(a) - \chi(a)| < \varepsilon\} = U_{a,\varepsilon}(\chi),\end{aligned}$$

qui e Ω. Tous le ψ e

un homéomorphisme, et donc $C(\Omega) = C(\sigma(a))$ e

quement à $C^*(a)$.

Enfin,

$$\sigma_A\big(f(a)\big) = \sigma_{C^*(a)}\big(f(a)\big) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f\big(\sigma(a)\big).$$

□

On peut voir $\varphi_a(f)$ comme une fonction continue f appliquée à a : c'e $p(a) = \varphi_a(p)$ car $\varphi_a(z) = a$ et φ_a e un homomorphisme. C'e
nous le reverrons en lien avec de

Exemple 2.2.6. *Soit $u \in A$ unitaire tel que $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$. Alors il existe $b \in A$ auto-adjoint tel que $u = e^{ib}$. (L'élément b e
de a.)*

Pour le construire, on choisit $z_0 \in \mathbb{T} \setminus \sigma(u)$ et une branche de log *dont la ligne de coupure passe par z_0. Il re* $b = \varphi_u(-i\log)$.
Sur $\mathbb{T} \setminus \{z_0\}$, la fonction log *prend de*
alors $b^* = \varphi_u(\overline{-i\log}) = \varphi_u\big(i(-\log)\big) = b$.

En général, tout élément unitaire n'admet pas de logarithme dans $C^*(u)$, il suffit de considérer u avec $\sigma(u) = \mathbb{T}$: si un tel b existait il aurait la forme $\varphi_u(f)$ pour $f \in C(\mathbb{T})$, mais (par exemple) f prend forcément une valeur c dans deux point $s \neq t$ *de $\mathbb{T}$, alors c'e* e^{if} *aussi, mais un doit avoir $e^{if} = z$.*

Plusieurs généralisations du Théorème 2.2.5 sont po

- ⋆ On peut appliquer de $\sigma(a)$ à tout élément a d'une algèbre de Banach.
- ⋆ Il existe un calcul borélien qui permet d'appliquer toute fonction borélienne bornée à un élément normal, mais il faut que la C^*-algèbre soit de von Neumann, c'e fermée dans la to ; par exemple, ce calcul existe dans $B(H)$.
- ⋆ Enfin, on peut appliquer de
tout o

Donnons quelque

Définition 2.2.7. *Soit T un o
e* $D(T)$ *d'un e* H *; on dit que T
e* T *e
dans $H \times H$; c'e* $x_n \to x$, $Tx_n \to y$ *implique $x \in D(T)$ et $Tx = y$.*

L'o T^* e

$$D(T^*) = \{y \in H : \text{ l'application } x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ e } \};$$

on définit $T^*y \in H$ tel que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pour tout $x \in D(T)$. On dit que T e $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour tout $x, y \in D(T)$, et auto-adjoint si $T = T^*$ (il en suit qu'il e

Exemple 2.2.8. L'o $T : f \mapsto if'$ défini sur $C_c^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ e symétrique : pour $f, g \in D(T)$

$$\langle Tf, g\rangle = i\int_{\mathbb{R}} f'(t)\overline{g(t)}dt = i[fg]_{-\infty}^{\infty} - i\int_{\mathbb{R}} f\overline{g'} = \langle f, Tg\rangle.$$

Si $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ en norme $\|\cdot\|_2$, on n'aura pas en principe $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, T n'e
mais dans ce cas T^* aurait un domaine tro

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ e } \qquad f' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

alors T sera auto-adjoint.

La fonction $\varphi : t \to \dfrac{t-i}{t+i}$ e $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}\backslash\{1\}$, avec l'inverse $t = -i\dfrac{z+1}{z-1}$.

Pro 2.2.9 (Transofmée de Cayley). Soit T un o auto-adjoint. Alors l'image de $T+i$ e H, $\|Tx + ix\| = \|Tx - ix\|$ pour tout $x \in D(T)$, et l'application

$$U : Tx + ix \mapsto Tx - ix, \quad y \mapsto (T-i)(T+i)^{-1}y,$$

e H.

U e T. Étant unitaire, il e normal et on peut y appliquer toute fonction continue sur $\sigma(U)$. On po

$$f(T) = f \circ \varphi^{-1}(U),$$

mais il faut garantir que $f \circ \varphi^{-1}$ soit continue en 1. A priori, 1 peut bien être dans le spectre de U, mais il ne peut pas être une valeur pro

Exemple 2.2.10. *Si* T *e* $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ *pour tout* $x \in D(T)$, *alors le spectre de* U *sera contenu dans* $\varphi([0, +\infty[)$, *et on peut donner du sens à* $\exp(-T)$. *L'o* $\Delta = \dfrac{d^2}{dx^2}$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}} f''\bar{f} = -\int_{\mathbb{R}} f'\bar{f}' \leqslant 0,$$

on peut donc définir $\exp(-t\Delta)$ *pour tout* $t \geqslant 0$. *Cela donne la solution de l'équation de Laplace :* $u_t' = -\Delta u$ *si* $u_t = \exp(-t\Delta f)$, *avec la condition initiale* $u_0 = f$. *Le principe e* $\mathbb{R}^n$.

Avec le théorème spectral, on peut faire plus : appliquer toute fonction bornée borélienne, mais ce théorème n'entre pas dans le cours.

—— (fin du cours 9) ——

2.3 Po

2.3.1 Élément

A e C^*-algèbre.

Définition 2.3.1. *Un élément* $a \in A$ *e* $a = a^*$ *et* $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. *On le note* $a \geqslant 0$. *L'ensemble de e* A^+.

Remarque 2.3.2. *Si* $B \subset A$ *ne contient pas l'unité de* A, *le spectre dans* B *et dans* A *peut être différent. Exemple :* $A = C([0,1] \cup [2,3])$, $B = \{f \in A : f|_{[0,1]} \equiv 0\}$. *Pour* $f \in B$, *on a* $\sigma_B(f) = f([2,3])$ *et* $\sigma_A(f) = \sigma_B(f) \cup \{0\}$.

Pro 2.3.3. *Si* B *e* C^**-algèbre de* A, *alors* $\sigma_A(b) \cup \{0\} = \sigma_B(b) \cup \{0\}$ *pour tout* $b \in B$.

Démonstration. En passant à $\tilde{A}$ si A n'a pas d'unité, on peut suppo A unifère. Si B contient l'unité de A, on a $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ pour tout $b \in B$.

Sinon soit $B_1 := B \oplus \mathbb{C}1_A$. C'e C^*-algèbre de A contenant l'unité, donc $\sigma_A(b) = \sigma_{B_1}(b)$ pour tout $b \in B$. Cette algèbre e isomorphe à l'adjonction de l'unité extérieure à B (qu'elle soit unifère ou non). Si B n'a pas d'unité, alors $B_1 \simeq \tilde{B}$ et $\sigma_{B_1}(b) = \sigma_B(b)$ pour tout $b \in B$.

Enfin, suppo B a une unité e différente de 1_A. Dans ce cas B_1 e $B \otimes \mathbb{C}$ avec l'isomorphisme $\varphi(b - \lambda 1) = (b - \lambda e, -\lambda)$; si $\lambda \neq 0$, l'élément $b - \lambda 1$ e B_1 ssi $b - \lambda e$ e inversible dans B, d'où $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_{B_1}(b) \cup \{0\}$. □

Pro 2.3.4. *Si B e C^*-algèbre de A, alors $B^+ = B \cap A^+$.*

Démonstration. L'égalité $\sigma_A(b) \cup \{0\} = \sigma_B(b) \cup \{0\}$ montre que $\sigma_B(b) \subset \mathbb{R}^+$ ssi $\sigma_A(b) \subset \mathbb{R}^+$ pour tout $b \in B$. □

Pro 2.3.5. *Soit $a \geqslant 0$, alors il existe unique $b \in A^+$ tel que $b^2 = a$. On le note $b = \sqrt{a}$.*

Démonstration. Dans $\tilde{A}$, on peut appliquer à a la fonction $\sqrt{\cdot}$ continue sur son spectre, cela donne $b = \sqrt{a} \in C^*(a)$ tel que $b^2 = a$. Toute fonction continue sur $\sigma(a)$ s'annulant en 0 e
sans le terme libre, donc en réalité $b \in A$.

Suppo $c \in A^+$ vérifie la même égalité $c^2 = a$. On a $ca = c^3 = ac$, donc c commute avec a et tous le a, donc avec $C^*(a)$ (rappelons que $a = a^*$) et en particulier, avec b. Soit $B \subset A$ la C^*-algèbre, commutative, engendrée par b et c ; elle contient a, et e isomorphe à $C_0(\Omega)$ où Ω e B. On a $\widehat{b}^2 = \widehat{c}^2 = \widehat{a}$. Le élément b et c sont po B (par la pro
donc $\widehat{b}(\chi) \geqslant 0$ et $\widehat{c}(\chi) \geqslant 0$ pour tout $\chi \in \Omega$. Il en suit $\widehat{b} = \widehat{c}$ et enfin $b = c$. □

Pour $a = a^*$, on a $a^2 \geqslant 0$ (car le spectre de a e
a priori dans $\tilde{A}$:

$$|a| = \sqrt{a^2}, \quad a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|), \quad a^- = \frac{1}{2}(|a| - a).$$

Par le

$$a^\pm \geqslant 0, \quad a = a^+ - a^-, \quad a^+ a^- = a^- a^+ = 0.$$

Ce a, sans le
donc il A même si A n'a pas d'unité.

Pro 2.3.6. *Suppo A e*

- ⋆ *Si $a = a^*$ et $\|t - a\| \leqslant t$ avec $t \geqslant 0$, alors $a \geqslant 0$.*
- ⋆ *Si $a \geqslant 0$ et $\|a\| \leqslant 1$, alors $\|1 - a\| \leqslant 1$.*

Démonstration. Dans toute a e
donc l'algèbre $C^*(a)$ e $\|t-a\| \leqslant t$ implique $\|t-\widehat{a}\|_\infty \leqslant t$, dans le sens de fonctions sur le spectre de $C^*(a)$; ce n'e $\widehat{a} \geqslant 0$, d'où $a \geqslant 0$ $\big($dans $C^*(a)$ et dans $A\big)$.

Si $a \geqslant 0$ et $\|a\| \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \widehat{a} \leqslant 1$, donc $\|1-\widehat{a}\|_\infty = \|1-a\| \leqslant 1$. □

Corollaire 2.3.7. *Un élément autoadjoint a e*

$$\big\|a - \|a\|\big\| \leqslant \|a\|.$$

Démonstration. On peut suppo $a \neq 0$, et on applique la pro précédente à $a/\|a\|$ qui a la norme 1. □

Pro 2.3.8. *A^+ e A, tel que $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$.*

Démonstration. Pour $a \in A^+$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a évidemment $ta \in A^+$. Soient $a, b \in A^+$. Avec $t = \|a\| + \|b\|$, on a

$$\|a+b-t\| \leqslant \big\|a - \|a\|\big\| + \big\|b - \|b\|\big\| \leqslant \|a\| + \|b\| = t,$$

donc $a + b \geqslant 0$. La convexité e
corollaire 2.3.7 montre que A^+ e

Enfin, si $a \geqslant 0$ et $-a \geqslant 0$, alors $\sigma(a) = \{0\}$ d'où $\|a\| = \rho(a) = 0$. □

Remarque 2.3.9. *On sait que le produit de deux po toujours po*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(fin du cours 10)

Pro 2.3.10. *Soit B une algèbre unifère et $a, b \in B$, alors $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \neq 0$. S'il existe $(ab-\lambda)^{-1} = c$, alors $abc = 1 + \lambda c = cab$ et

$$(ba-\lambda)(bca-1) = b(1+\lambda c)a - ba - \lambda bca + \lambda = \lambda,$$

et de même $(bca-1)(ba-\lambda) = \lambda$, donc $ba - \lambda$ e □

Pro 2.3.11. *Un élément autoadjoint $a \in A$ e $a = bb^*$ avec $b \in A$.*

Démonstration. Si $a \geqslant 0$, alors $a = bb^*$ avec $b = b^* = \sqrt{a}$. Soit $a = bb^*$. On décompo $a = a^+ - a^- = u^2 - v^2$ avec $u, v \in A^+$ tel $uv = vu = 0$ (ce sont de a). On aura :

$$vav = (vb)(vb)^* = vbb^*v^* = v(u^2 - v^2)v = -v^4 \in -A^+.$$

En écrivant $vb = x + iy$ avec x, y auto-adjoint

$$(vb)^*(vb) + vb(vb)^* = (x - iy)(x + iy) + (x + iy)(x - iy) = 2x^2 + 2y^2,$$

d'òu

$$(vb)^*(vb) = 2x^2 + 2y^2 + v^4 \geqslant 0.$$

Par la pro $(vb)(vb)^* \geqslant 0$. Mais alors $vb(vb)^* = 0$, d'où $vb = 0$ et $0 = vav = -v^4$ donc $v = 0$, et a e po □

Corollaire 2.3.12. *Un o $A \in B(H)$ e $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.*

Démonstration. Si $A \geqslant 0$, on peut re $A = B^*B$ avec $B \in B(H)$, alors $\langle Ax, x\rangle = \|Bx\|^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.

Si la forme bilinéaire $\langle A\cdot, \cdot\rangle$ e $A = A^*$:

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle^- = \langle x, Ax\rangle,$$

d'où par l'identité de polarisation

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0^3} i^k \langle A(x + i^k y), x + i^k y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Et ensuite, pour $\lambda < 0$ on a

$$\langle (A - \lambda)x, x\rangle \geqslant |\lambda| \|x\|^2,$$

d'où $\|(A-\lambda)x\| \geqslant |\lambda|\|x\|$ et $\ker(A-\lambda) = 0$. Au même temps, $\left[(A-\lambda)H\right]^\perp = \ker\left((A-\lambda)^*\right) = \ker(A-\lambda) = 0$, donc l'image de $A - \lambda$ e H. Enfin, elle e $(A - \lambda)x_n \to y$ implique $\|x_n - x_m\| \to 0$, $n, m \to \infty$, d'où il existe $x = \lim x_n$ et $y = (A - \lambda)x$. On voit que $A - \lambda$ e $\lambda \notin \sigma(A)$. □

Définition 2.3.13. *On note $|a| = \sqrt{a^*a}$ pour tout $a \in A$, et $A_h = \{a \in A : a = a^*\}$. Pour $a, b \in A_h$ on dit que $a \leqslant b$ si $b - a \geqslant 0$. Ce relation d'ordre.*

Théorème 2.3.14. *Dans une C^*-algèbre A,*

1. $A^+ = \{b^*b : b \in A\}$;
2. *Si* $a, b \in A_h$ *et* $a \leqslant b$, *alors* $c^*ac \leqslant c^*bc$ *pour tout* $c \in A$.
3. *Si* $0 \leqslant a \leqslant b$, *alors :*
   (a) $a \leqslant \|a\|$;
   (b) $\|a\| \leqslant \|b\|$;
   (c) $a \geqslant 1$ *implique que a e* $a^{-1} \leqslant 1$;
   (d) *si* a, b *sont inversible* $0 \leqslant b^{-1} \leqslant a^{-1}$;

Démonstration. (1) e $b - a \geqslant 0$ implique $b - a = d^*d$ pour $d \in A$, alors $c^*(b-a)c = c^*d^*dc = (dc)^*dc \geqslant 0$.

(3) Soit $0 \leqslant a \leqslant b$. On peut suppo A unifère.

(a) Dans $C^*(a)$, on a $\widehat{a} \leqslant \|a\|$ donc $a \leqslant \|a\|$.

(b) On a $a \leqslant b \leqslant \|b\|$. Dans $C^*(a)$, on a donc $\widehat{a} \leqslant \|b\|$ d'où $\|a\| = \|\widehat{a}\|_\infty \leqslant \|b\|$.

(c) Si $a \geqslant 1$, alors $\sigma(a-1) \subset \mathbb{R}_+$ donc $0 \notin \sigma(a)$. Ensuite,

$$\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\} \subset]0, 1]$$

d'où $1 - a^{-1} \geqslant 0$.

(d) De $1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leqslant a^{-1/2}ba^{-1/2}$ il suit $a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leqslant 1$ donc $b^{-1} \leqslant a^{-1}$. □

2.3.2 Fonctions monotone

Définition 2.3.15. *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *e* *tone d'o* $0 \leqslant a \leqslant b$ *implique* $f(a) \leqslant f(b)$ *pour toute paire d'élément* a, b *d'une C^*-algèbre.*

On peut montrer que $f(t) = \sqrt{|t|}$ e $f(t) = t^2$ ne l'e

—————— (fin du cours 11) ——————

Pro 2.3.16. *La fonction* $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ *e* *teur.*

Démonstration. Soit $0 \leqslant a \leqslant b$. On a alors $1 + a \leqslant 1 + b$, d'où $(1+b)^{-1} \leqslant (1+a)^{-1}$. On calcule

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t},$$

d'où

$$b(1+b)^{-1} - a(1-a)^{-1} = (1+a)^{-1} - (1+b)^{-1} \geqslant 0.$$

□

2.3.3 Unité

Soit A une C^*-algèbre. On note $\Lambda = \{a \in A^+ : \|a\| < 1\}$.
L'envelo Λ e A.

Pro 2.3.17. Pour tous $a, b \in \Lambda$ il existe $c \in \Lambda$ tel que $a \leqslant c$ et $b \leqslant c$.

Démonstration. Pour $a, b \in \Lambda$ le $1-a$, $1-b$ sont inversible dans $\tilde{A}$. On po $a_1 = a(1-a)^{-1} \geqslant 0$, $b_1 = b(1-b)^{-1}$, de sorte que $a = f(a_1)$, $b = f(b_1)$ avec $f(t) = t/(1+t)$. Soit $c = f(a_1 + b_1)$, alors $a_1 \leqslant a_1 + b_1$ implique $a = f(a_1) \leqslant c$ et de même $b \leqslant c$. On note finalement que même si A n'a pas d'unité, on a $a_1, b_1, c \in A$. □

Définition 2.3.18. *Un ensemble D ordonné e tous $a, b \in D$ il existe $c \in D$ tel que $a \leqslant c$ et $b \leqslant c$. Une suite généralisée e généralisée $(u_i)_{i \in D}$ dans un e E converge vers $u \in E$ si pour tout voisinage V de u il existe $i_0 \in D$ tel que $i \geqslant i_0$ implique $u_i \in V$.*

Théorème 2.3.19. *L'ensemble Λ e A : c'e par elle-même ; pour tout $a \in A$, le $(au)_{u \in \Lambda}$, $(ua)_{u \in \Lambda}$ convergent vers a en norme.*

Démonstration. Comme A e Λ, il suffit de considérer $a \in \Lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f_n(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{n}}$$

et $u_n = f_n(a)$. A priori le calcul fonctionnel e $\tilde{A}$, mais $u_n \in A$ car $f_n(0) = 0$. Sur $[0, \|a\|] \subset [0, 1]$, la fonction f_n e et po $u_n \geqslant 0$ et $\|u_n\| \leqslant f_n(\|a\|) \leqslant f_n(1) < 1$ et $u_n \in \Lambda$. On a

$$0 \leqslant t\bigl(1 - f_n(t)\bigr) = \frac{1}{n}\,\frac{t}{t + \frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}$$

pour $t \geqslant 0$, donc $\|a - au_n\| = \|a - u_n a\| \leqslant 1/n \to 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < \varepsilon$, alors pour $v \in \Lambda$ tel $v \geqslant u_n$ on a $1 - v \leqslant 1 - u_n$ et

$$a^{1/2}(1-v)a^{1/2} \leqslant a^{1/2}(1-u_n)a^{1/2} = a - au_n,$$

donc (comme $a, v \in A_h$ et $1 - v \leqslant 1$)

$$\begin{aligned}\|a - av\| &= \|a(1-v)^2 a\| \leqslant \|a(1-v)a\| \\ &\leqslant \|a^{1/2}(1-v)a^{1/2}\| \leqslant \|a - au_n\| \leqslant 1/n < \varepsilon.\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité $\|a - va\| < \varepsilon$ de la même façon. □

Corollaire 2.3.20. *Si A e*
approximative dénombrable $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dense dans A. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $u_m \in \Lambda$ tel que $\|a_n - a_n u_m\| < 1/m$ et $\|a_n - u_m a_n\| < 1/m$ pour $n = 1, \dots, m$: il faut choisir u_{nm} pour chaque $n = 1, \dots, m$ et prendre un majorant u_m de l'ensemble fini $\{u_{nm}\}_{n=1,\dots,m}$. Montrons que (u_m) e $a \in A$ et $\varepsilon > 0$ soit n, m_0 tel $\|a - a_n\| < \varepsilon/3$ et $1/m_0 < \varepsilon/3$. Pour tout $m \geqslant m_0$ on a

$$\begin{aligned}\|a - au_m\| &\leqslant \|a - a_n\| + \|a_n - a_n u_m\| + \|(a_n - a)u_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} + \|a_n - a\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient $\|a - u_m a\| < \varepsilon$. □

Théorème 2.3.21. *Tout idéal bilatéral $I \subset A$ e*

Démonstration. On peut suppo A unifère. L'intersection $B = I \cap I^*$ e C^*-algèbre. Elle po (u_i) croissante dans la boule unité de B^+. Pour $a \in I$, on a $a^*a \in B$ (on utilise le fait que I e $a^*a(1-u_i) \to 0$. Il en suit que

$$\|a(1-u_i)\|^2 = \|(1-u_i)a^*a(1-u_i)\| \leqslant \|a^*a(1-u_i)\| \to 0.$$

Maintenant $a^* = \lim(au_i)^* = u_i a^* \in I$ car $u_i \in I$ et I e
droite. Donc $I = I^*$; on note aussi que (u_i) e
$I = I \cap I^*$. □

(fin du cours 12)

Corollaire 2.3.22. *Soit $I \subset A$ un idéal bilatéral, alors A/I e*
C^*-algèbre avec la norme quotient.

Démonstration. Il e A/I e $*$-algèbre de Banach. Soit (u_i) une unité approchée (qu'on suppo
boule unité) de I. Pour $a \in A$ et $\varepsilon > 0$ soit $b \in I$ tel que $\|a+b\| < \|a+I\|+\varepsilon$, et soit i_0 tel que $\|b - bu_i\| < \varepsilon$ pour $i \geqslant i_0$. Alors

$$\begin{aligned}\|a - au_i\| &\leqslant \|a + b - (a + b)u_i\| + \|b - bu_i\| \\ &= \|(1 - u_i)(a + b)\| + \|b - bu_i\| \leqslant \|a + b\| + \varepsilon < \|a + I\| + 2\varepsilon;\end{aligned}$$

comme aussi $\|a - au_i\| \geqslant \|a + I\|$, on conclut que $\|a + I\| = \lim_i \|a - au_i\|$. De même, $\|a + I\| = \lim_i \|a - u_i a\|$.

Maintenant

$$\begin{aligned}\|a^*a + I\| &= \lim_i \|a^*a(1 - u_i)\| \geqslant \overline{\lim_i}\, \|(1 - u_i)a^*a(1 - u_i)\| \\ &= \lim_i \|a(1 - u_i)\|^2 = \|a + I\|^2,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 2.3.23. *Soit A, B de C^*-algèbre $\varphi : A \to B$ un -*
homomorphisme. Alors $\varphi(A)$ e $A/\ker\varphi$.
En particulier, $\varphi(A)$ e B.

Démonstration. Suppo φ e
faut montrer que $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ pour tout $a \in A$. C'e
$\|\varphi(a^*a)\| = \|a^*a\|$, on peut donc suppo a auto-adjoint. En ajoutant 1 si be A unifère et φ unital. Enfin, il suffit de considérer la re φ de $C^*(a)$ dans l'adhérence de $\varphi(A)$, donc on peut suppo A et B commutative $A \simeq C(K)$, $B \simeq C(L)$, avec K, L compact

Pour tout $y \in L$ la fonctionnelle $f \mapsto \varphi(f)(y)$ e
A, ce qui donne une application $j : L \to K$. Elle e
inverse de $O_{f,\varepsilon}(jy) = \{x \in K : |f(jy) - f(x)| < \varepsilon\}$ e

$$\{z \in L : |f(jy) - f(jz)| < \varepsilon\} = O_{f\circ j,\varepsilon}(y).$$

L'image $j(L)$ e K. S'il n'e
à K, il existe $0 \neq f \in C(K)$ qui s'annule sur $j(L)$, par le théorème d'Ury $\varphi(f)(y) = f(jy) = 0$ pour tout $y \in L$, donc

$\varphi(f) = 0$, ce qui contredit l'hy $j(L) = K$, et

$$\|f\|_\infty = \sup_{y \in L} |f(jy)| = \|\varphi(f)\|_\infty.$$

Soit maintenant φ non néce $I = \ker \varphi$; on sait que φ engendre une application quotient $\bar{\varphi} : A/I \to B$. C'e -homomorphisme injectif de la C^*-algèbre A/I, donc $\bar{\varphi}$ e c'e B e $A/\ker\varphi$. □

2.3.4 Forme

Soit A une $*$-algèbre de Banach.

Définition 2.3.24. *Une fonctionnelle linéaire $\varphi : A \to \mathbb{C}$ e po $\varphi(a^*a) \geqslant 0$ pour tout $a \in A$.*

On introduit un produit scalaire sur A :

$$(a, b)_\varphi = \varphi(b^*a)$$

(il e a, antilinéaire en b, po néré, c.à.d. $(a, a)_\varphi = 0$ n'implique pas $a = 0$) et la seminorme $\|a\|_\varphi = (a, a)_\varphi^{1/2}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (applicable aux e pré-Hilbertiens) on a

$$|(a, b)_\varphi| \leqslant \|a\|_\varphi \|b\|_\varphi.$$

(fin du cours 13)

Dans une C^*-algèbre A, une fonctionnelle po φ e

- ⋆ po A^* car tout $a \in A^+$ a la forme $a = b^*b$, $b \in A$;
- ⋆ croissante de A^+ dans $\mathbb{R}^+$: $a \leqslant b$ implique $b - a = c^*c$ donc $f(b) = f(a) + f(c^*c) \geqslant f(a)$.

Pro 2.3.25. *Si A e C^*-algèbre, alors toute fonctionnelle linéaire po A e*

Démonstration. Suppo $\varphi : A \to \mathbb{C}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A^+ telle que $\|a_n\| \leqslant 1$ pour tout n. Pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre $\sum_n t_n < \infty$, la série $\sum_n t_n a_n$ converge, vers une somme a, et on a

$$\sum_{n=1}^{N} t_n a_n \leqslant a$$

pour tout N car $\sum_{n\geqslant N} t_n a_n \in A^+$. Donc

$$\sum_{n=1}^{N} t_n f(a_n) \leqslant f(a).$$

L'application

$$(t_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(a_n)$$

e ℓ_1, et évidemment linéaire. Soit m sa norme.

Par la de ℓ_1 égal à ℓ_∞,

$$\sup_n |f(a_n)| = m < \infty.$$

Comme la suite (a_n) était arbitraire, il en suit que

$$M = \sup\{f(a) : a \in A^+, \|a\| \leqslant 1\} < \infty.$$

On en déduit ensuite que $|f(a)| \leqslant M\|a\|$ pour $a \in A^+$. Pour tout $a \in A_h$ nous avons $a = a_+ - a_-$ avec $\|a_\pm\| \leqslant \|a\|$, donc $|f(a)| \leqslant 2M\|a\|$. Enfin, tout $a \in A$ a la forme $a = a_1 + ia_2$ avec $a_1, a_2 \in A_h$ et $\|a_j\| \leqslant \|a\|$, donc $|f(a)| \leqslant 4M\|a\|$. □

Dans la suite on suppo

en sachant que pour le C^*-algèbre

On ne peut pre

A qu'on garde pour le re

$*$ A admet une unité approchée (u_i) de norme $\leqslant 1$.

Pour tout a on a

$$\begin{aligned}\varphi(a^*) &= \lim_i \varphi(a^* u_i^*) = \lim_i (u_i^*, a)_\varphi = \lim_i \overline{(a, u_i^*)_\varphi} = \lim_i \overline{\varphi(u_i^* a)} \\ &= \lim_i \overline{\varphi((a^* u_i)^*)} = \overline{\varphi((a^*)^*)} = \overline{\varphi(a)},\end{aligned}$$

donc φ e

Ensuite, pour tout $a \in A$

$$|\varphi(a)|^2 = \lim_i |\varphi(u_i a)|^2 \leqslant \overline{\lim_i}\, \varphi(u_i^* u_i)\varphi(a^* a) \leqslant \|\varphi\| \|a\|_\varphi^2,$$

et on obtient l'importante inégalité

$$|\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\|\, \varphi(a^* a). \tag{2.1}$$

Si A n'a pas d'unité, on prolonge φ sur $\tilde{A} = \mathbb{C}1 \oplus A$ en po

$\varphi(1) = \|\varphi\|$. Pour $\lambda 1 + a \in \tilde{A}$, on a

$$\varphi\big((\lambda 1 + a)^*(\lambda 1 + a)\big) = \varphi(|\lambda|^2 1 + \lambda a^* + \bar{\lambda} a + a^* a)$$

$$= |\lambda|^2\|\varphi\| + 2\mathrm{Re}\big(\bar\lambda\varphi(a)\big) + \varphi(a^*a)$$
$$\geqslant |\lambda|^2\|\varphi\| + 2\mathrm{Re}\big(\bar\lambda\varphi(a)\big) + |\varphi(a)|^2/\|\varphi\| = |\varphi(\lambda+a)|^2\|\varphi\|^{-1} \geqslant 0,$$

alors cette extension e

Pro 2.3.26. Soit φ une fonctionnelle po

1. $\|\varphi\| = \sup_{a\in A, \|a\|\leqslant 1} \varphi(a^*a)$.
2. Si (a_i) e $\|a_i\| \leqslant 1$ et $\varphi(a_i) \to \|\varphi\|$, alors $\varphi(a_i^*a_i) \to \|\varphi\|$.
3. Si (u_i) e $\varphi(u_i) \to \|\varphi\|$ et $\varphi(u_i^*u_i) \to \|\varphi\|$.
4. Si A e $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Démonstration. 1. Il e $\varphi(a^*a) \leqslant \|\varphi\|$ si $\|a\| \leqslant 1$. Par (2.1), on a aussi

$$\|\varphi\|^2 = \sup_{\|a\|\leqslant 1} |\varphi(a)|^2 \leqslant \|\varphi\|\,\varphi(a^*a),$$

d'où il suit l'égalité de 1.

2. C'e

$$\|\varphi\|^2 \geqslant \|\varphi\|\varphi(a_i^*a_i) \geqslant |\varphi(a_i)|^2 \to \|\varphi\|^2.$$

3. Considérons $\tilde A$ avec le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\varphi$ et la seminorme $\|\cdot\|_\varphi$. Soit (a_n) une suite dans A telle que $\|a_n\| \leqslant 1$ et $\varphi(a_n) \to \|\varphi\|$. Alors dans $\tilde A$, par 2.,

$$\varphi\big((a_n-1)^*(a_n-1)\big) = \varphi(a_n^*a_n) - \varphi(a_n^*) - \varphi(a_n) + \varphi(1) \to 0,$$

donc $\|a_n - 1\|_\varphi \to 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|a_n - 1\|_\varphi < \varepsilon \text{ et } \big|\varphi(a_n) - \|\varphi\|\big| < \varepsilon$$

si $n \geqslant n_0$; renotons $b = a_{n_0}$. Pour tout $a \in A$, $\varphi(u_ia) \to \varphi(a)$, donc il existe i_0 tel que $|\varphi(u_ib) - \varphi(b)| < \varepsilon$ pour $i \geqslant i_0$. Pour ce i on a alors

$$|\varphi(u_i) - \|\varphi\|| \leqslant |\varphi(u_i - u_ib)| + |\varphi(u_ib - b)| + |\varphi(b) - \|\varphi\||$$
$$\leqslant \|u_i\|_\varphi\|1-b\|_\varphi + 2\varepsilon < \varepsilon(2 + \|\varphi\|),$$

ce qui montre que $\varphi(u_i) \to \|\varphi\|$. Par 2., il en suit $\varphi(u_i^*u_i) \to \|\varphi\|$.

4. C'e

□

Il en suit en particulier que la norme du prolongement de φ sur $\tilde{A}$ e $\varphi(1)$ donc à la norme $\|\varphi\|$ initiale.

Pour $b \in A$, soit $\varphi_b(a) = \varphi(b^*ab)$. C'e po $\varphi_b(a^*a) = \varphi((ab)^*ab) \geqslant 0$. Sa norme, ou bien la norme de son prolongement sur $\tilde{A}$, e $\|\varphi_b\| = \varphi(b^*b)$. Cela nous donne encore une inégalité : pour tous $a, b \in A$

$$|\varphi(b^*a^*ab)| \leqslant \varphi(b^*b)\|a^*a\|. \tag{2.2}$$

2.3.5 La re

Définition 2.3.27. *Soit A une $*$-algèbre. Un re A sur un e H e $\pi : A \to B(H)$. Si $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ pour tout $a \in A$, on dit que π e $*$-re*

(fin du cours 14)

Quitte à diviser par $\|\varphi\|$, on peut admettre $\|\varphi\| = 1$; on suppo aussi A unifère.

Soit $J = \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$.

Pro 2.3.28. *
- $\star$ $J = \{f : \varphi(b^*a) = 0 \ \ \forall b \in A\}$;
- $\star$ J e
- $\star$ sur J, φ s'annule.*

Démonstration. $\star$ On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz : si $a \in J$, alors pour tout $b \in A$

$$|\varphi(b^*a)| \leqslant \|a\|_\varphi \|b\|_\varphi = 0.$$

Réciproquement, si a vérifie cette pro $\varphi(a^*a) = 0$.

$\star$ Si $a_1, a_2 \in J$ alors on peut écrire $b^*(a_1a_2) = (a_1^*b)^*a_2$ pour tout $b \in A$, on voit alors que J e évidente de la même de J.

$\star$ Si $a \in J$, on a $|\varphi(a)|^2 \leqslant \varphi(1)\varphi(a^*a) = 0$.

□

Soit $H_0 = A/J$ (en tant qu'e H_0, le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\varphi$ e $a, b \in A,\ j, j' \in J$

$$(a+j, b+j')_\varphi = \varphi\big((b+j')^*(a+j)\big) = \varphi(b^*a + j'^*a + bj + j'^*j)$$
$$= \varphi(b^*a) = (a,b)_\varphi.$$

Le produit e J, et le complété H de H_0 e

Pour $a, b \in A$, on po $\pi(a)(b+J) = ab + J$. Cela définit bien une application sur H_0 car si $j \in J$, alors

$$\pi(a)(b+j+J) = a(b+j) + J = ab + J.$$

Évidemment $\pi(a)$ e $\xi = b + J \in H_0$

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = (\pi(a)\xi, \pi(a)\xi)_\varphi = (ab, ab)_\varphi = \varphi(b^*a^*ab)$$
$$\leqslant \varphi(b^*b)\|a^*a\| = \|b\|_\varphi^2 \|a\|^2 = \|\xi\|^2\|a\|^2,$$

donc $\|\pi(a)\|$ e H_0 de norme $\leqslant \|a\|$. Il s'étend donc à H par continuité. Pour $a, b, c \in A$ on a

$$\pi(ab)(c+J) = abc + J = \pi(a)(bc+J) = \pi(a)\pi(b)(c+J),$$

donc π e $a, b, c \in A$,

$$\langle \pi(a^*)(b+J), c+J\rangle_H = \langle a^*b + J, c+J\rangle_H = \varphi(c^*a^*b)$$
$$= (b, ac)_\varphi = \langle b+J, \pi(a)(c+J)\rangle_H.$$

Notons $\xi = 1 + J$. Pour $a \in A$, on a

$$\varphi(a) = (a,1)_\varphi = \langle a+J, 1+J\rangle_H = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle_H.$$

L'ensemble démontre le théorème :

Théorème 2.3.29. *Un fonctionnelle continue $\varphi : A \to \mathbb{C}$ e si et seulement s'il existe une re π de A sur un e H et un vecteur $\xi \in H$ tel*

$$\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle.$$

On a dans ce cas $\|\varphi\| = \|\xi\|^2$.

Parfois il e cyclique : l'e $\pi(A)\xi$ e H. Effectivement, cet e consiste de $\pi(a)\xi = a + J$ pour tous $a \in A$, c.à.d. $\pi(A)\xi = H_0$.

2.3.6 Le C*-algèbre

Si A e C^*-algèbre, la condition $\|\varphi\| = \varphi(1)$ e

Théorème 2.3.30. *Soit A une C^*-algèbre unifère et φ une fonctionnelle linéaire bornée sur A. Alors φ e*
$\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Démonstration. Si φ e $\|\varphi\| = \varphi(1)$. Soit maintenant φ telle que $\|\varphi\| = \varphi(1)$; on peut suppo
généralité. Suppo φ n'e $a \in A^+$
tel que $\varphi(a)$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; et ce dernier contient $\sigma(a)$. Il existe donc (on le voit géométriquement) $w \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que le disque $D = \{z : |z - w| < r\}$ contient $\sigma(a)$, mais ne contient pas $\varphi(a)$. Le spectre de $a - w \in A$ e $\sigma(a) - w \subset D - w \subset \{z : |z| < r\}$, et comme cet element e
spectral (cno $C^*(a - w)$) et e r. On a alors $|\varphi(a) - w| = |\varphi(a - w)| \leqslant \|\varphi\|\|a - w\| < r$. Mais cela veut dire que $\varphi(a) \in D$, contradiction qui montre qu'en fait $\varphi(a) \geqslant 0$. □

Définition 2.3.31. *Soit A une -algèbre de Banach. Une fonctionnelle po φ e A si $\|\varphi\| = 1$. On note $S(A)$ l'ensemble de A.*

Pour une C^*-algèbre unifère A, on a donc $S(A) = \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = \varphi(1)\}$.

Pro 2.3.32. *Soit A une C^*-algèbre et $0 \neq a \in A^+$. Alors il existe $\varphi \in S(A)$ tel que $\pi_\varphi(a) \neq 0$ et $\varphi(a) \neq 0$.*

Démonstration. Le vecteur $-a^*a$ n'appartient pas au cône fermé convexe A^+ dans l'e A_h sur $\mathbb{R}$; par l'une de
de Hahn-Banach, il existe $\psi \in A_h^*$ telle que $\psi|_{A^+} \geqslant 0$ et $\psi(-a^*a) < 0$. Pour tout $b = b_1 + ib_2 \in A$ avec $b_1, b_2 \in A_h$, po $\varphi(b) = \psi(b_1) + i\psi(b_2)$, alors $\varphi \in A^*$, et évidemment φ e (π_φ, ξ) la re
tion GNS et le vecteur cyclique associé φ. Alors

$$0 < \varphi(a^*a) = \langle \pi_\varphi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \|\pi_\varphi(a)\xi\|^2,$$

donc $\pi_\varphi(a) \neq 0$. En divisant par $\|\varphi\|$, on obtient un état sur A. □

Corollaire 2.3.33. *Toute C^*-algèbre A admet une -re injective π sur un e H. L'image $\pi(A)$ e ment isomorphe à A. On peut donc identifier A avec une sous-algèbre fermée de $B(H)$.*

Démonstration. Pour tout $\varphi \in S(A)$, soient $(H_\varphi, \pi_\varphi, \xi_\varphi)$ l'e bert, la re φ. On po

$$H = \oplus_{\varphi \in S(A)} H_\varphi,$$

et pour tout $a \in A$, $x = \oplus \varphi x_\varphi \in H$

$$\pi(a)x = \oplus \pi_\varphi(a) x_\varphi.$$

C'e $*$-re
injective. Le re
de C^*-algèbre □

Théorème 2.3.34. *Soit A une C^*-algèbre. Un élément $a \in A$ e po $\varphi(a) \geqslant 0$ pour tout état φ de A.*

Démonstration. L'implication directe e verse, on peut suppo $A \subset B(H)$. L'hy a implique que $\langle ax, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in H$, alors $a \geqslant 0$ (dans $B(H)$, donc aussi dans la C^*-sous-algèbre A). □

Chapitre 3

Groupe compact

3.1 La me $L^1(G)$

Définition 3.1.1. *Un groupe localement compact e*
muni de to
l'inverse sont continus.

Exemple 3.1.2. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$, *tout groupe discret,* $\mathbb{T}^E$ *pour tout* E, *tout groupe profini, groupe*

Soit $F(G)$ l'e G dans $\mathbb{C}$. On définit de translations à gauche L_g et à droite R_g pour $g \in G$: si $f \in F(G)$ et $h \in G$,

$$L_g f(h) = f(g^{-1}h), \quad R_g f(h) = f(hg).$$

Le $g \mapsto L_g$ et $g \mapsto R_g$ sont de
ce qui ne serait pas le cas sans l'inversion dans la formule de L_g.

Pour une partie $E \subset G$, on po

$$gE = \{gh : h \in E\}, \quad Eg = \{hg : h \in E\}.$$

Théorème 3.1.3 (admis). *Soit* G *un groupe localement compact. Alors il existe de* μ_l, μ_r *sur* G *inva-*
riante $E \subset G$ *borélien*
et $g \in G$

$$\mu_l(gE) = \mu_l(E), \quad \mu_r(Eg) = \mu_r(E).$$

La me μ_l', μ_r' sont d'autre
me $C, C' > 0$ tel
que $\mu_l' = C\mu_l$ et $\mu_r' = C'\mu_r$.

On le
$C_c(G)$ de G à support compact.

Définition 3.1.4. La me μ_l (μ_r), définie à constante prè
appelée la me G.

Exemple 3.1.5. Sur $\mathbb{R}^n$, $\mu_l = \mu_r$ e
groupe $G = GL_n(\mathbb{R})$:

$$\int_G f(g)d\mu_{l,r}(g) = \int_G \frac{f(g)}{(\det g)^n} dg$$

où dg e $\mathbb{R}^{n^2}$; en particulier, c'e $\dfrac{dx}{x}$
sur $\mathbb{R}^\times$.

Pour tout $x \in G$,

$$J_x : f \mapsto \int_G f(yx)dm_l(x)$$

e $C_x\mu_l$ où $C_x > 0$ e
constante. On obtient une fonction $\Delta : G \to \mathbb{R}+$, $\Delta(x) = C_x^{-1}$, ou bien

$$\Delta(x)^{-1} = \frac{\int_G f(yx)d\mu_l(y)}{\int_G f(y)d\mu_l(y)},$$

où f peut être toute fonction non-nulle po $C_c(G)$. On obtient
facilement que Δ e $\Delta(e) = 1$.
On l'appelle la fonction modulaire du groupe G, et on dit que G e
unimodulaire si $\Delta \equiv 1$. Comme le G
dans $L^1(G)$, la fonction modulaire e

Exemple 3.1.6. Le
modulaire $GL_n(R)$ aussi.

Soit G le group «ax+b» qui consiste de

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$; c'e
réel : $g_{a,b}(x) = ax + b$.

G e $\dfrac{1}{a^2}dadb$, la
droite $\dfrac{1}{a}dadb$, et la fonction modulaire $\Delta(a, b) = a^{-1}$.

On peut considérer l'e $L^1(G)$ par rapport à μ_l ou μ_r, ce qui e

Avec le produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d_l y$$

$L^1(G)$ e

soit $\mathcal{V}$ une base de voisinage e ; on l'ordonne par l'inclusion inverse, $U \preceq V$ ssi $U \supset V$. Avec cet ordre, $\mathcal{V}$ e V, $\mu(V)$ e I_V e dans $L^1(G)$. On po

$$e_V = \frac{1}{\mu(V)} I_V, \quad V \in \mathcal{V}.$$

On montre que c'e $f \in L^1(G)$ et $x \in G$,

$$(f * e_V)(x) = \frac{1}{\mu(V)} \int_G f(y) I_V(y^{-1}x)dy;$$

$y^{-1}x \in V$ ssi $x^{-1}y \in V^{-1} = V$ ssi $y \in xV$, alors

$$(f * e_V)(x) - f(x) = \frac{1}{\mu(V)} \int_{xV} [f(y) - f(x)]dy = \frac{1}{\mu(V)} \int_V [f(xy) - f(x)]dy$$

et

$$\|f * e_V - f\|_1 \leqslant \frac{1}{\mu(V)} \int_V \int_G |R_y f(x) - f(x)| dxdy \leqslant \sup_{y \in V} \|R_y f - f\|_1,$$

ce qui tend vers 0 en $V \in \mathcal{V}$.

La fonctionnelle

$$J : f \mapsto \int_G f(x^{-1}) d\mu_l(x)$$

e

$$J(R_g f) = \int_G (R_g f)(x^{-1}) d\mu_l(x) = \int_G f((g^{-1}x)^{-1}) d\mu_l(x) = J(f),$$

on peut donc admettre que c'e μ_r. L'intégrale

$$J'(f) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1}) d\mu_l(x)$$

e

$$\begin{aligned} J'(R_g f) &= \int_G f(xg)\Delta(x^{-1}) d\mu_l(x) = \int_G f(xg)\Delta(xg)^{-1}\Delta(g) d\mu_l(x) \\ &= \Delta(g)^{-1} J'(f)\Delta(g) = J'(f). \end{aligned}$$

On a donc $J'(f) = cJ(f)$ avec une constante $c > 0$. En comparant le valeurs sur l'unité approchée, on conclut que $c = 1$, donc

$$\int_G f(x^{-1}) d\mu_l(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1}) d\mu_l(x). \tag{3.1}$$

On introduit une involution sur $L^1(G)$: $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x)^{-1}$. Par (3.1), $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$, donc $L^1(G)$ e

3.2 L'algèbre $C^*(G)$; le lien entre le tations du groupe et de

Définition 3.2.1. *Une re* G *e*
π *de* G *dans le groupe* $GL(E)$ *de*
e E. *Si* E *e* $\pi(g)$ *e*
pour chaque $g \in G$, *on dit que* π *e*
le $\xi, \eta \in H$, *la fonction*
$g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle$ *e* $g \mapsto$
$\pi(g)\xi$ *e* $\xi \in H$.

Toute re π de G sur H engendre une re sentation de $L^1(G)$ par

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg;$$

l'intégrale e $\xi, \eta \in H$

$$\langle \pi(f)\xi, \eta\rangle = \int_G f(g)\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle dg.$$

On vérifie que π e $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$.

Réciproquement, toute re π de $L^1(G)$ sur H définit une re G sur l'e $\overline{\pi(L^1(G))H}$; on dit que π e H.

Une re $L^2(G)$, on po $\lambda(f) : h \mapsto f * h$, ce qui corre $\lambda(x) = L_x$, $x \in G$. Cette re G e

$$\|\lambda(x)h\|_2^2 = \int_G |h(x^{-1}y)|^2 d\mu_l(y) = \|h\|_2^2.$$

Comme $\xi_V \in L^2(G)$ et $f*\xi_V \to f$ dans $L^(G)$, en particulier, ce ne sont pas toute $f \neq 0$, donc la re λ e sur $L^1(G)$.

Pour $f \in L^1(G)$, soit

$\|f\|_* = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi$ e $\}$.

C'e $\|f\|_1$, et elle vérifie évidemment l'identité $\|f^* f\|_* = \|f\|_*^2$. Comme au moins λ e norme.

Le complété de $L^1(G)$ par rapport à $\|\cdot\|_*$ e C^*-algèbre notée $C^*(G)$.

Toute -re $L^1(G)$ s'étend par continuité à $C^*(G)$. Finalement, on a une bijection entre :

- ⋆ re G ;
- ⋆ -re $L^1(G)$;
- ⋆ -re $C^*(G)$.

3.3 La dualité abélienne

[Cette partie a été pré
avec de

Dans cette section, G e
A rappeler, le $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{T}^n$ (où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Un autre exemple e $\mathbb{Q}_p$ de p-adique

Définition 3.3.1. *Un caractère φ de G e continu $\varphi : G \to \mathbb{T}$. L'ensemble de G e $\widehat{G}$.*

Exemple 3.3.2. $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, avec l'identification $\varphi_t(x) = e^{itx}$, $x, t \in \mathbb{R}$.

$\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, avec l'identification $\varphi_z(n) = z^n$, $z \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$.

On peut montrer que $\widehat{\mathbb{Q}}_p \simeq \mathbb{Q}_p$.
htt _adicHarmonicAnaly

Il e $\widehat{G}$ e
cation ponctuelle : $(\varphi \cdot \psi)(x) := \varphi(x)\psi(x)$, $\varphi^{-1}(x) := 1/\varphi(x) = \overline{\varphi(x)}$.

On définit une to $\widehat{G}$: pour $\varphi \in \widehat{G}$, $\varepsilon > 0$, $F \subset G$ compact on po

$$U_{\varepsilon,F}(\varphi) = \{\psi \in \widehat{G} : |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in F\}. \tag{3.2}$$

La convergence de caractère
convergence uniforme sur le

On sait que $L^1(G)$ e
commutative. Comme chaque caractère e
continue de dimension 1, on obtient le corollaire suivant d'un théorème du cours :

Théorème 3.3.3. $\widehat{G}$ *corre*
tère $L^1(G)$, *c.à.d. de* $\tilde{\varphi} : L^1(G) \to \mathbb{C}$
non-nul $\varphi(f^*) = \overline{\varphi(f)}$.

Il n'e φ involutif : si $\varphi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ e
sachant que $\left(L^1(G)\right)^* = L^\infty(G)$, on a $\varphi(f) = \int_G f(x)h(x)dx$ avec une fonction $h \in L^\infty(G)$ de norme $\|h\|_\infty \leqslant 1$.

Comme φ e $f \in L^1(G)$ telle que $\varphi(f) = 1$. Pour $x \in G$, soit $\alpha(x) = \varphi({}_{x^{-1}}f)$. On sait que l'application $x \mapsto {}_{x^{-1}}f$, $G \to L^1(G)$ e $\alpha : G \to \mathbb{C}$ e $g \in L^1(G)$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(g) = \varphi(g)\varphi(f) = \varphi(g * f) &= \int_G (g * f)(x)h(x)dx \\
&= \int_{G\times G} g(y)f(y^{-1}x)h(x)dxdy = \int_G g(y)\alpha(y)dy,
\end{aligned}$$

d'où $\alpha = h$ (pre h continue.

Soient maintenant $f, g \in L^1(G)$ quelconque

$$\int_G (f * g)(x)h(x)dx = \int_{G\times G} f(y)g(y^{-1}x)h(x)dxdy = \int_{G\times G} f(x)g(z)h(yz)dxdz.$$

Comme φ e

$$\varphi(f)\varphi(g) = \int_{G\times G} f(x)g(y)h(x)h(y)dxdy.$$

Il en suit que $h(xy) = h(x)h(y)$ (partout par continuité), alors $h : G \to \mathbb{C}$ e $|h(x)| \leqslant 1$ pour tout x ; par conséquence, $|h(x)| = 1$ pour tout x, donc $h^*(x) = \overline{h(x^{-1})} = \overline{1/h(x)} = h(x)$.

Si on po $\psi(f) = \overline{\varphi(f^*)}$, on obtient de nouveau un caractère (non-nul) qui e

$$\begin{aligned}
\psi(f) &= \int_G \overline{f^*(x)h(x)}dx = \int_G f(x^{-1})\overline{h(x)}dx \\
&= \int_G f(x)\overline{h(x^{-1})}dx = \int_G f(x)h^*(x)dx = \varphi(f)
\end{aligned}$$

(on utilise le fait que G e $\varphi = \psi$ e
Conclusion :

Théorème 3.3.4. $\widehat{G}$ e $L^1(G)$. Avec la to

Démonstration. Il ne re

Soit τ_1 la to τ_2 la to $L^1(G)$. Soit $f \in L^1(G)$, on note $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$, $\varphi \in \widehat{G}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $F \subset G$ tel que $\int_{G \setminus F} |f| < \varepsilon$; pour tout $\psi \in U_{\varepsilon,F}(\varphi)$ on a

$$|\varphi(f) - \psi(f)| \leqslant \int_G |f(x)||h_\varphi(x) - h_\psi(x)|dx \leqslant \varepsilon \int_F |f(x)| + 2\int_{G\setminus F} |f| < \varepsilon(\|f\|_1 + 2).$$

Cela montre que $\widehat{f}$ e τ_1-continue. Par définition, τ_2 e minimale qui rend toute $\widehat{f}$ continue $\tau_2 \subset \tau_1$.

Identifions $\varphi \in \widehat{G}$ avec la fonction $h_\varphi : G \to \mathbb{T}$ (qui e de G). Pour $x \in G$, soit $\widehat{x} : \varphi \mapsto \varphi(x)$; en considérant $U_{\varepsilon,\{x\}}(\varphi)$, on voit que $\widehat{x}$ e τ_1-continu. De la formule intégrale on déduit que $\widehat{f_x}(\varphi) = \widehat{f}(\varphi)\varphi(x^{-1})$ pour tous $f \in L^1(G)$, $\varphi \in \widehat{G}$, donc

$$\widehat{x}(\varphi) = \frac{\widehat{f_{x^{-1}}}(\varphi)}{\widehat{f}(\varphi)} \tag{3.3}$$

si $\widehat{f}(\varphi) \neq 0$. Pour tout φ il existe $f \in L^1(G)$ et un τ_2-voisinage V de φ tel que $\widehat{f}|_V \neq 0$; ceci implique la continuité de $\widehat{x}$ sur V, et évidemment il en suit la continuité sur $\widehat{G}$.

De (3.3), on peut déduire même plus. Pour f choisie comme avant (on peut admettre que $|\widehat{f}(\varphi)| > 1/2$ pour $\varphi \in V$) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U = U^{-1}$ un voisinage de e dans G tel que $\|f_x - f_y\|_1 < \varepsilon$ si $x^{-1}y \in U$. On a alors $|\widehat{f_x(\varphi)} - \widehat{f_y(\varphi)}| < \varepsilon$ pour tout $\varphi \in \widehat{G}$ et le x, y. Il en suit

$$\begin{aligned}
|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\psi)| &\leqslant \Big|\frac{\widehat{f_{x^{-1}}}(\varphi) - \widehat{f_{x^{-1}}}(\psi)}{\widehat{f}(\varphi)}\Big| + \Big|\frac{\widehat{f_{x^{-1}}}(\psi) - \widehat{f_{y^{-1}}}(\psi)}{\widehat{f}(\varphi)}\Big| \\
&\quad + |\widehat{f_{y^{-1}}}(\psi)| \cdot \Big|\frac{1}{\widehat{f}(\psi)} - \frac{1}{\widehat{f}(\varphi)}\Big| \\
&\leqslant 2|\widehat{f_{x^{-1}}}(\varphi) - \widehat{f_{x^{-1}}}(\psi)| + 2\varepsilon + 2\|f\|_1 \Big|\frac{1}{\widehat{f}(\psi)} - \frac{1}{\widehat{f}(\varphi)}\Big|.
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{f}$, $\widehat{f_{x^{-1}}}$ sont continue τ_2-voisinage W de φ tel que

$$|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\psi)| < 3\varepsilon, \qquad y \in xU, \psi \in W. \tag{3.4}$$

Montrons maintenant que le $U_{\varepsilon,F}$ de (3.2) sont τ_2-ouvert ε, F fixe $x \in F$ il existent un voisinage U_x de x et un τ_2-voisinage V_x de φ tel $|\widehat{x}(\varphi) - \widehat{y}(\psi)| < \varepsilon/2$ si $y \in U_x$ et $\psi \in V_x$. Par compacité on choisit $x_1, \dots, x_n \in F$ tel $F \subset \cup_{k=1}^n U_{x_k}$. Soit $V = \cap_{k=1}^n V_{x_k}$. Pour $y \in F$, $\psi \in V$ il existe k tel que $y \in U_{x_k}$, et on a

$$|\varphi(y) - \psi(y)| \leqslant |\widehat{y}(\varphi) - \widehat{x_k}(\varphi)| + |\widehat{x_k}(\varphi) - \widehat{y}(\psi)| < \varepsilon,$$

d'où $\psi \in U_{e,F}(\varphi)$. Cela termine la preuve. □

On a montré, en arrivant à (3.4), le fait suivant qui mérite d'être formulé à part :

Pro 3.3.5. *L'évaluation* $(x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$ *e*
de $G \times \widehat{G}$ *dans* $\mathbb{T}$.

3.4 La transformée de Fourier

Pour $f \in L^1(G)$, on note $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ la fonction $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Comme $\widehat{G}$ e $L^1(G)$, $\widehat{f} \in C_0(\widehat{G})$. L'application $\mathcal{F} : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$, $f \mapsto \widehat{f}$ e
transformée de Gelfand de l'algèbre de Banach $L^1(G)$.

Remarque 3.4.1. *Pour garder la formule habituelle de l'analy*
le cas $G = \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx,$$

on admet qu'un caractère $t \in \widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$ *corre*
$x \mapsto e^{-itx}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$. *On pourrait aussi introduire* $\overline{\varphi}$ *au lieu de* φ *dans la définition de la transformée de Fourier en général ; c'e*
e
d'identifier $\mathcal{F}$ *avec la transformée de Gelfand.*

On vérifie que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. Cela suit aussi du fait que c'e
$\mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}(f)}$. Pour tout $\varphi \in \widehat{G}$, il existe un voisinage U de l'identité dans G tel que $|\varphi(x) - 1| = |\varphi(x) - \varphi(e)| < 1/2$ pour $x \in U$, alors

$$|\varphi(I_U) - \mu(U)| = \Big| \int_U (\varphi(x) - 1) d\mu(x) \Big| < \frac{1}{2}\mu(U)$$

d'où $\varphi(I_U) = \widehat{I_U}(\varphi) \neq 0$. Cela montre que toute
rème de Stone-Weierstrass sont vérifiée $\mathcal{F}(L^1(G))$
e $C_0(\widehat{G})$. On note aussi cette algèbre $A(G)$.

On avait montré qu'il existe un homomorphisme injectif $J : L^1(G) \to C^*(G)$, et en plus le $C^*(G)$ sont en bijection avec celle $L^1(G)$. Le spectre de $C^*(G)$ e $\widehat{G}$ (dans le cas abélien). On sait que toute C^*-algèbre commutative A e $0 \neq a \in A$ implique qu'il existe un caractère φ de A tel que $\varphi(a) \neq 0$. En l'appliquant à $C^*(G)$, on obtient : pour toute $f \in L^1(G)$ non-nulle il existe $\varphi \in \widehat{G}$ tel que $\varphi(f) = \widehat{f}(\varphi) \neq 0$. C'e
la transformée de Fourier.

Pro 3.4.2 (La formule de Plancherel). *Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, alors $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ et $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.*

Démonstration. Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, sa norme se calcule comme suit :

$$(f * \tilde{f})(e) = \int_G f(x)\tilde{f}(x^{-1})dx = \int_G f(x)\overline{f(x)}dx = \|f\|_2^2.$$

La fonction $f * \tilde{f}$ e
version $\widehat{f * \tilde{f}} = |\widehat{f}|^2 \in L^1(\widehat{G})$ et

$$(f * \tilde{f})(e) = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}|^2(t)\overline{\langle e, t\rangle}dt = \|\widehat{f}\|^2,$$

ce qui était à démontrer. $\square$

Sur $L^1(G) \cap L^2(G)$, $\mathcal{F}$ e $L^2(\widehat{G})$. Comme cet e $L^2(G)$, $\mathcal{F}$ se prolonge par continuité à une isomtétrie de $L^2(G)$ à $L^2(\widehat{G})$.

On termine par l'énoncé du théorème de dualité :

Théorème 3.4.3 (Dualité de Pontryagin). *Tout groupe abélien localement compact G e*
dual de $\widehat{G}$.

Bibliographie

[1] . Murphy, C^*-algebras
[2] . Folland, Harmonic analy