École d'hiver du LMB 2024

Fonctions implicites et sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Yulia Kuznetsova

11 janvier 2024

1 Théorème des fonctions implicites

Exemple : $x^2 + y^2 = R^2$ *e* $y = h(x)$ *si* $y \neq 0$, $x = h(y)$ *sinon ; à remarquer que* $2y = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - R^2)$.

La preuve suivante suit en ligne

Suppo $n = p + m$ *avec* $p, m \geqslant 1$, *et notons dans la suite le point* $\mathbb{R}^n$ *par* (x, y), *où* $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 1 (des fonctions implicites)**.** *Soit* $W \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, et soit* $F : W \to \mathbb{R}^m$ *une fonction de classe* $C^{(k)}$, $k \geqslant 1$. *Suppo* $a = (x_a, y_a) \in W$ *e* $F(a) = 0$ *et* $d_y F(a) = \Big(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(a)\Big)$ *e* *dans* $M_m(\mathbb{R})$. *Alors il existe un ouvert* $U \subset W$ *contenant* a, *un ouvert* $V \subset \mathbb{R}^p$ *contenant* x_a *et une fonction* $G : V \to \mathbb{R}^m$ *de classe* $C^{(k)}$ *tel que* $U \cap F^{-1}(0) = \{(x, G(x)) : x \in V\}$.

Démonstration. *Notons* $M = F^{-1}(0)$. *On procedera par recurrence en* m.

- *Soit* $m = 1$, *et alors* $F : W \to \mathbb{R}$. *Par l'hy* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_a, y_a) \neq 0$ *; on peut admettre qu'elle e* $W_1 \subset W$ *tel que* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(b) > 0$ *pour tout* $b \in W_1$. *On peut suppo* *que* W_1 *contient l'ensemble* $V_1 \times I$ *où* V_1 *e* x_a *et* $I = [y_a - \varepsilon, y_a + \varepsilon]$ *avec* $\varepsilon > 0$. *Pour tout* $x \in V_1$, *la fonction* $F_x : y \mapsto F(x, y)$ *e* I.

Par l'hy $F(x_a, y_a) = 0$, *alors* $F(x_a, y_a + \varepsilon) > 0$ *et* $F(x_a, y_a - \varepsilon) < 0$. *Par continuité (sur le* $y = y_a + \varepsilon$ *et* $y = y_a - \varepsilon$*) on peut trouver un ouvert* $V \subset V_1$ *tel que* $F(x, y_a + \varepsilon) > 0$ *et* $F(x, y_a - \varepsilon) < 0$ *pour tout* $x \in V$. *Par le théorème de* $x \in V$ *il existe* $y \in I$ *tel que* $F(x, y) = 0$. *Comme* F_x *e* *croissante, cette valeur e* y *par* $G(x)$, *en obtenant*

une fonction $G : V \to \mathring{I} \subset \mathbb{R}$ (à noter que $G(x)$ n'e
de I).

On po $U = V \times \mathring{I}$. Par construction, $M \cap U = \{(x, G(x)) : x \in V\}$.

• Suppo $m > 1$ et le théorème et vérifié pour toute dimension inférieure à m. Par l'hy $\det d_y F(a) \neq 0$, alors chaque ligne contient au moins un élément non-nul, et $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_m}(a) \neq 0$ pour un certain i ; on peut admettre que $i = m$.

Pour la suite on aura be $b = (x, y) \in \mathbb{R}^n$, on notera $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$ et $\tilde{b} = (x, \tilde{y})$.

La fonction $F_m : W \to \mathbb{R}$ vérifie le
le cas $m = 1$, donc il existe un ouvert U_1 contenant a, un ouvert $V_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ contenant $\tilde{a}$ et une fonction $h : V_1 \to \mathbb{R}$ telle que $U_1 \cap F_m^{-1}(0) = \{(x, \tilde{y}, h(x, \tilde{y})) : (x, \tilde{y}) \in V_1\}$.

Notons $\Phi_i(x, \tilde{y}) = F_i(x, \tilde{y}, h(x, \tilde{y}))$ pour $i = 1, \ldots, m$, $(x, \tilde{y}) \in V_1$. Par construction, on a $\Phi_m \equiv 0$. Cela définit une fonction $\Phi : V_1 \to \mathbb{R}^m$. Pour $1 \leqslant j \leqslant m-1$ et $1 \leqslant i \leqslant m$, en tout $u \in V_1$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}(x, \tilde{y}) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\big(x, \tilde{y}, h(x, \tilde{y})\big) + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\big(x, \tilde{y}, h(x, \tilde{y})\big)\,\frac{\partial h}{\partial y_j}(x, \tilde{y}).$$

On peut remarquer que si $(x, \tilde{y}) = \tilde{a}$, alors $(x, \tilde{y}, h(x, \tilde{y})) = a$. Si on note par $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_j}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}$ le
$i = 1, \ldots, m$, on a alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\tilde{a}) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(a) + \frac{\partial h}{\partial y_j}(\tilde{a})\,\frac{\partial F}{\partial y_m}(a),$$

$\dfrac{\partial h}{\partial y_j}(\tilde{a})$ étant un scalaire. Le $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_j}(a)\right)$, $j = 1, \ldots, m$, sont le
colonne $d_y F(a)$ et sont donc libre
de $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\tilde{a})\right)$, $j = 1, \ldots, m-1$, et $\dfrac{\partial F}{\partial y_m}(a)$
engendrent le même e m), donc $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\tilde{a})\right)$,
$j = 1, \ldots, m-1$ sont néce

Soit $\tilde{\Phi} : V_1 \to \mathbb{R}^{m-1}$ la fonction «réduite» $(x, \tilde{y}) \mapsto \big(\Phi_1(x, \tilde{y}), \ldots, \Phi_{m-1}(x, \tilde{y})\big)$. À rappeler, $\Phi_m \equiv 0$, alors $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_j} \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout j, ce qui implique l'indépendance de $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_j}(\tilde{a})$, $j = 1, \ldots, m-1$; la matrice $d_y \tilde{\Phi}(\tilde{a})$
e

Par l'hy $m-1$), il existe
de $V_2 \subset V_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $V \subset \mathbb{R}^p$ contenant $\tilde{a}$ et x_a re
et une fonction $\tilde{G} : V \to \mathbb{R}^{m-1}$ tel $V_2 \cap \tilde{\Phi}^{-1}(0) = \{(x, \tilde{G}(x)) : x \in V\}$.

On po $U = (V_2 \times \mathbb{R}) \cap U_1$ et $G(x) = \big(\tilde{G}(x), h(x, \tilde{G}(x))\big)$. Cette fonction e $(x, \tilde{G}(x)) \in V_2 \subset V_1$, et ce dernier e h. On a évidemment $F(x, G(x)) = 0$. De l'autre côté, si $(x,y) \in U$ et $F(x,y) = 0$, alors en particulier $F_m(x,y) = 0$. Comme $U \subset U_1$, on a $y_m = h(x, \tilde{y})$. Ensuite $F(x,y) = F(x, \tilde{y}, h(x,\tilde{y})) = \Phi(x, \tilde{y})$, donc $\tilde{\Phi}(x, \tilde{y}) = 0$. Comme $(x, \tilde{y}) \in V_2$, on a $\tilde{y} = \tilde{G}(x)$. On peut alors conclure que $y = G(x)$.

- La continuité et la dérivabilité de G sont admise □

On peut calculer la dérivée / différentielle de la fonction implicite : $F(x, G(x)) \equiv 0$ dans V implique que pour tout i, j

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\big(x, G(x)\big) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_l}\big(x, G(x)\big)\frac{\partial G_l}{\partial x_j}(x),$$

ou, en forme matricielle,

$$-d_x F\big(x, G(x)\big) = d_y F\big(x, G(x)\big) dG(x),$$

d'où

$$dG(x) = -\Big(d_y F\big(x, G(x)\big)\Big)^{-1} d_x F\big(x, G(x)\big).$$

Si $x = x_a$, on a $(x, G(x)) = a$ et alors

$$dG(x_a) = -\big(d_y F(a)\big)^{-1} d_x F(a).$$

Il e G en a sans connaitre la fonction G elle-même.

Exemple 2. L'équation $u^3 - 2u^2x + uxy - 2 = 0$ définit une fonction implicite $u(x,y)$ dans un voisinage de $(1,1)$ avec $u(1,1) = 2$, car $\frac{\partial}{\partial u}(u^3 - 2u^2x + uxy - 2) = 3u^2 - 4ux + xy$ vaut $5 \neq 0$ en $(1,1,2)$. Le partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(1,1,2)\Big)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,2) = -\frac{1}{5}(-2u^2 + uy)|_{(1,1,2)} = \frac{6}{5},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = -\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(1,1,2)\Big)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,2) = -\frac{1}{5}(ux)|_{(1,1,2)} = -\frac{2}{5}.$$

On peut donc écrire sa forme approchée, par la formule de Taylor :

$$u(x,y) = 2 + \frac{6}{5}(x-1) - \frac{2}{5}(y-1) + o\big(\|(x-1, y-1)\|\big).$$

Corollaire 3. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^{(k)}$ telle que $df(a)$ e $W \subset U$ contenant a et un ouvert V contenant $f(a)$ tel $f : W \to V$ e $C^{(k)}$.*

Démonstration. Pour $y, x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \in U$ on peut po $F(y,x) = y - f(x)$, de $\mathbb{R}^n \times U \subset \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^n$. On a $d_xF(y,a) = -df(a)$ quel que soit y. Cette matrice e $F(f(a),a) = 0$, alors par le théorème de $U_1 \subset \mathbb{R}^n \times U$ contenant $(f(a),a)$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant $f(a)$ et une fonction $G : V \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^{(k)}$ telle que $U_1 \cap F^{-1}(0) = \{(y, G(y)) : y \in V\}$. On po $W = G(V)$.

Pour tout $y \in V$ on a donc $F(y, G(y)) = 0$, c'e $y = f(G(y))$. Réciproquement, si $x = G(y) \in W$, alors $F(y,x) = 0$, d'où $y = f(x)$ et $x = G(f(x))$. La fonction G e f et de classe $C^{(k)}$, ce qui termine la preuve. □

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Le

définition et dans le théorème il faut comprendre «difféomorphisme» et «lisse» dans le sens «de classe $C^{(k)}$», où k (qui peut être infini) e

toujours d'une «sous-variété de classe $C^{(k)}$» en précisant le k si be

Définition 4. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ e p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $a \in M$ il existe de U de a et V de 0 et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Cette définition n'e $\mathbb{R}^n$, mais elle corre

Exemple 5. Si $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, sur $U = \{(x,y) : y > 0\}$ on peut po $f(x,y) = (x, x^2 + y^2 - 1)$. On obtient $V = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z > x^2 - 1\}$, ce qui se vérifie par exemple en définissant la fonction inverse $f^{-1}(x,z) = (x, \sqrt{z + 1 - x^2})$. Ce U, V, f valent pour $y > 0$; pour le M on construit de

Théorème 6. *Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Le équivalente*

1. *M e p de $\mathbb{R}^n$;*
2. *Pour tout $a \in M$ il existe un ouvert U contenant a et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ (c.à.d. le rang de $dg(u)$ e $n - p$ pour tout $u \in U$) telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$;*
3. *Pour tout $a \in M$ il existe une ouvert U contenant a, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ contenant 0 et une application $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui e*

fois immersion (c.à.d. $dh(x)$ e $x \in \Omega$) et un homeomorphisme de Ω sur $U \cap M$;

4. Pour tout $a \in M$ il existe un ouvert U contenant a, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et une application lisse $G : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel $U \cap M$ soit egal au graphe de G.

Démonstration. On note $m = n - p$.

1 $\Longrightarrow$ 2 Pour $a \in M$ soient U, V, f donnes par (1). On garde l'ouvert U et on po $g(u) = (f^{(p+1)}(u), \dots, f^{(n)}(u)) \in \mathbb{R}^m$ pour $u \in U$. Evidemment $g(u) = 0$ si $u \in U \cap M$. Reciproquement, si $g(u) = 0$, alors $f(u) \in V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, donc il existe $v \in U \cap M$ tel que $f(u) = f(v)$. Par l'hy f e $u = v$, et on conclut que $g^{-1}(0) = U \cap M$. La matrice de dg e dernière m colonne df ; elle independante g e

2 $\Longrightarrow$ 4 Le $dg(a)$ sont $\dfrac{\partial g}{\partial u_j}$, $j = 1, \dots, n$. Par l'hy m libre le $j = p+1, \dots, n$. Pour $u \in \mathbb{R}^n$ on note, comme dans le theoreme de $u = (x, y)$ où $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^m$. On peut appliquer ce theoreme à la fonction g car $d_y g(a)$ e y. Il existent alors un ouvert $W \subset U$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ et une fonction lisse $G : V \to \mathbb{R}^m$ tel $W = \{(x, G(x)) : x \in V\}$.

4 $\Longrightarrow$ 3 On po $\Omega = V$ et $h(x) = (x, G(x))$. Par l'hy $h(\Omega) = U \cap M$. La fonction h e c'e p coordonnee h e homeomorphisme. Enfin, $dh(x) = \begin{pmatrix} I_p \\ dG(x) \end{pmatrix}$ e $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

3 $\Longrightarrow$ 1 Par l'hy p independante de la matrice $dh(a)$. En permutant le peut admettre que ce soient le première p. Soit p_x la pro ce W contenant $p_x a$ et un ouvert $V \subset \Omega$ contenant 0 tel $g := p_x h : V \to W$ e diffeomorphisme.

On po $f(x, y) = (x, y - p_y h(g^{-1}(x))$ sur $U_1 = U \cap (W \times \mathbb{R}^m)$, et on note $V = f(U_1)$. Pour tout $v \in V$ on po $x = p_x v$ et $y = v + p_y h(g^{-1}(x))$ pour obtenir une fonction inverse. Il e f et f^{-1} sont de classe $C^{(k)}$, f e U_1 sur V.Enfin, si $(x,y) \in U_1 \cap M$, alors $(x,y) = h(z)$ avec $z \in \Omega$, donc $x = g(z)$ et $y = p_y h(z)$ d'où $f(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$. □

Exemple 7. (1) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ e $f = \mathrm{Id}$ dans la definition. En particulier : $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

(2) $M = SL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ e n^2-1 : dans le Theoréme (2), po $g(A) = \det A - 1$. En tout point A, la derivee partielle $\dfrac{\partial g}{\partial A_{ij}}$ e
un de non-nul.

(3) La sphére S^n e n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. En (2) du Theoréme, po $g(x) = x_1^1 + \cdots + x_{n+1}^2 - 1$. Le gradient $dg(x) = 2x$ e $x \in S^n$.

(4) Le produit $M = M_1 \times M_2$ de sous-varietes de $\mathbb{R}^{n_j}$ de dimension p_j, $j = 1, 2$, e $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de dimension $p_1 + p_2$. Dans Theoréme (4), po $U = U_1 \times U_2$, $V = V_1 \times V_2$ et $G(x_1, x_2) = (G_1(x_1), G_2(x_2))$. Le même pour un produit de tout nombre fini de facteurs.
En particulier, le tore $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ e n (qui peut être realise en tant que sous-variete de $\mathbb{R}^{2n}$, mais eventuellement de $\mathbb{R}^m$ avec m plus petit).

(5) $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$, alors $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$ où $F(A) = AA^t - I$. On a $F(A+H)+I = (A+H)(A+H)^t = AA^t + AH^t + HA^t + HH^t$ donc $dF(A)(H) = AH^t + HA^t$. L'image de $dF(A)$ e
matrice $Sym_n(\mathbb{R})$, mais aussi toute matrice symetrique S y e $H = \frac{1}{2}SA$. La dimension de $Sym_n(\mathbb{R})$ e $n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, et s'e $dF(A)$ pour toute A orthogonale. Soit P la pro $M_n(\mathbb{R})$ sur $Sym_n(\mathbb{R})$ (qui ne garde que le $P \circ F$ e submersion. La dimension de $O_n(\mathbb{R})$ e $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

A noter, la dimension de $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(]0, +\infty[)$ e
même.

(6) Le cone $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geqslant 0\}$ n'e sous-variete de $\mathbb{R}^3$. Suppo
alors par (3) du Theoréme il existe un ouvert U contenant $0 \in M$, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant 0 (en considerant le M on obtient nece $p = 2$) et une immersion $h : \Omega \to \mathbb{R}^3$ realisant un homeomorphisme entre Ω et $U \cap M$. En particulier, la fonction

$f : t \mapsto h(t,0)$, definie dans un intervalle autour de 0, e
derivee non-nulle car $df(0) = dh(0,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $dh(0,0)$ e
a donc $f(t) \sim f'(0)t$, $t \to 0$ et $\|f(t)\| \sim C|t|$ avec $C = \|f'(0)\| \neq 0$. Au même temps, $f_3(t)$ atteint son minimum global en 0, donc $f_3'(0) = 0$ et $f_3(t) = o(t)$, $t \to 0$. Le f etant dans M, on doit pourtant avoir $f_3(t)^2 = f_1(t)^2 + f_2(t)^2$ ce qui implique $\|f(t)\|^2 = o(t^2)$, contradiction avec l'equivalence $\|f(t)\| \sim C|t|$, $C \neq 0$, obtenue avant.

Remarque 8. L'e M en a e $dh(a)(\mathbb{R}^p)$ où h e fonction parametrisante du (3) du Theoreme. Mais sa discussion ne fera pas partie de ce cours.

Références

[1] V. Zorich, Mathematical analy

[2] J. Lafontaine, Introduction aux varietes differentielle
Science