Produits tensoriels

École d'hiver du LMB 2025

Yulia Kuznetsova

9 janvier 2025

1 Motivation

- ⋆ Topologie : fonctions de deux variables ; $C(K)\bar{\otimes}C(L) = C(K \times L)$
- ⋆ Représentations : une façon de les multiplier, $\pi \otimes \rho$ agit sur $H_\pi \otimes H_\rho$
- ⋆ Opérateurs de rang fini : $T = \sum \varphi_i \otimes x_i$; produits complétés : opérateurs approximables par ceux de rang fini
- ⋆ Géométrie différentielle : formes différentielles, en particulier antisymétriques / alternées $\Rightarrow$ intégrales par des surfaces
- ⋆ Groupes quantiques : une algèbre d'opérateur A avec une co-multiplication $\Delta : A \to A\bar{\otimes}A$ (duale à la multiplication)
- ⋆ Information quantique : états sont des vecteurs de $H_1 \otimes H_2$ (intéraction de deux systèmes quantiques)

2 Construction

Fonctionnelles bilinéaires (multilinéaires),
considérées comme des espaces vectoriels.

Ou encore : $W = E \otimes F$ tel que l'inclusion $(x, y) \mapsto x \otimes y$ est bilinéaire en $x \in E$, $y \in F$.

On construit cet espace explicitement et on obtient les propriétés ci-citées ensuite.

Soient E, F des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. On rappelle que $E \times F$ est un espace vectoriel avec

$$\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2).$$

Tout vecteur $(x,y) \in E \times F$ est égal à $(x,0)+(0,y)$; $E \times \{0\}$ et $\{0\} \times F$ engendrent $E \times F$ linéairement.

Si $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une base (algébrique) de E et $(f_\beta)_{\beta\in B}$ une base de F, alors

$$\{(e_\alpha, 0) : \alpha \in A\} \cup \{(0, f_\beta) : \beta \in B\}$$

est une base de $E \times F$. Si $d_E = \dim E < \infty$ et $d_F = \dim F < \infty$, alors $\dim E \times F = d_E + d_F$.

On verra plus tard que $\dim E \otimes F = d_E \cdot d_F$.

La construction commence par l'espace suivant :

Définition 2.1. *Soient E, F des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. On considère l'espace $E \odot F$ des combinaisons linéaires formelles*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k \otimes y_k), \qquad \lambda_k \in \mathbb{K},\ x_k \in E,\ y_k \in F,$$

avec les opérations évidentes. On considère ensuite le sous-espace vectoriel I dans $E \odot F$ engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} \{(x_1+x_2)\otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y &: x_1, x_2 \in E, y \in F; \\ x \otimes (y_1 + y_2) - x \otimes y_1 - x \otimes y_2 &: x \in E, y_1, y_2 \in F; \\ \lambda(x\otimes y) - (\lambda x) \otimes y & \text{ et} \\ \lambda(x\otimes y) - x \otimes (\lambda y) &: x \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}\}. \end{aligned}$$

Si besoin, on le notera $I_{E,F}$ pour indiquer les espaces en question. Le produit tensoriel $E \otimes F$ est défini comme l'espace quotient $(E \odot F)/I$.

Il faut noter que l'espace $E \odot F$ est énorme : tous les vecteurs $x \otimes y$ sont indépendants, et on ne peut pas, par exemple, simplifier la somme $x\otimes y + (-x)\otimes y$. Même dans le cas où $E = F = \mathbb{K}$ est de dimension 1, on obtient donc un espace de dimension infinie. Mais ce n'est plus le cas avec $E \otimes F$.

On remarque que :

- ⋆ $E \otimes F$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, comme tout espace quotient ;
- ⋆ dans $E \otimes F$, si on note par $\tilde{x} \otimes \tilde{y} = x \otimes y + I$ la classe du vecteur $x \otimes y \in E \times F$, on a

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \otimes \tilde{y} &= \tilde{x}_1 \otimes \tilde{y} + \tilde{x}_2 \otimes \tilde{y}; \\ \tilde{x} \otimes (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) &= \tilde{x} \otimes \tilde{y}_1 + \tilde{x} \otimes \tilde{y}_2; \\ \lambda(\tilde{x} \otimes \tilde{y}) &= (\lambda \tilde{x}) \otimes \tilde{y} = \tilde{x} \otimes (\lambda \tilde{y}). \end{aligned}$$

L'application canonique $J_{E,F} : E \times F \to E \otimes F$, $(x,y) \mapsto \tilde{x} \otimes \tilde{y}$ est donc bilinéaire. On écrit désormais $x \otimes y$ au lieu de $\tilde{x} \otimes \tilde{y}$ dans $E \otimes F$.

- ⋆ Pour tout $x \in E$, on a

$$x \otimes 0 = x \otimes (0_{\mathbb{K}} \cdot 0_F) = (0_{\mathbb{K}} \cdot x) \otimes 0_F = 0_E \otimes 0_F = 0_{E\otimes F},$$

  et de même, $0 \otimes y = 0$ pour tout $y \in F$.
- ⋆ On appelle les tenseurs de forme $x \otimes y$ simples. Exemple de manipulation de tenseurs :

$$\begin{aligned}(2x_1 + 3x_2) \otimes (y_1 - y_2) &= (2x_1 + 3x_2) \otimes y_1 - (2x_1 + 3x_2) \otimes y_2 \\ &= 2x_1 \otimes y_1 + 3x_2 \otimes y_1 - 2x_1 \otimes y_2 - 3x_2 \otimes y_2.\end{aligned}$$

  Le vecteur $x_1 \otimes y_1 - x_2 \otimes y_2$ n'est pas un tenseur simple (si x_j et y_j sont libres).
- ⋆ Tout vecteur $z \in E \otimes F$ s'écrit comme une somme finie

$$z = \sum x_k \otimes y_k \text{ avec } x_k \in E,\ y_k \in F,\ k = 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

  On peut choisir (y_k) libres, car s'ils ne le sont pas, on peut simplifier la décomposition : par exemple, $y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k$ implique

$$z = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \otimes y_k + x_n \otimes \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k y_k \Big) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k + \lambda_k x_n) \otimes y_k.$$

  De même, on peut supposer (x_k) libres.

Si $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une base de E et $(f_\beta)_{\beta\in B}$ une base de F, alors les vecteurs

$$\{e_\alpha \otimes f_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$$

engendrent $E \otimes F$, on peut donc dire que $\dim E \times F \leqslant d_E \cdot d_F$. On montrera plus tard que c'est une base. Pour le moment, on se contente de dire qu'on peut simplifier $x_1 \otimes y + x_2 \otimes y = (x_1 + x_2) \otimes y$, mais a priori pas $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$, et qu'en principe, tous les vecteurs ne s'écrivent pas dans la forme $x \otimes y$.

Exemple 2.2. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C} = F$. L'application $E \to E \otimes \mathbb{C}$, $x \mapsto x \otimes 1$ est linéaire et surjective : tout $x \otimes y$ où $y \in \mathbb{C}$ est égal à $(x/y) \otimes 1$ si $y \neq 0$ et sinon à 0.*

3 Applications bilinéaires

Proposition 3.1. *Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\xi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors l'application $\tilde{\xi} : E \odot F \to G$, définie sur les tenseurs simples comme*

$$\tilde{\xi} : x \otimes y \mapsto \xi(x, y)$$

et prolongée sur $E \odot F$ par linéarité, s'annule sur I et définit donc une application quotient linéaire de $E \otimes F$ dans G.

Réciproquement, toute application linéaire $\tilde{\xi} : E \otimes F \to G$ définit une application bilinéaire $\xi : E \times F \to G$, et la correspondance $\xi \leftrightarrow \tilde{\xi}$ est un isomorphisme linéaire.

Démonstration. On note qu'application quelconque $x \otimes y \mapsto \xi(x, y) \in G$ peut être prolongée sur $E \odot F$ par linéarité. On vérifie que si ξ est bilinéaire, alors $\tilde{\xi}$ s'annule sur I. On l'évalue aux vecteurs engendrant I : pour $x_1, x_2, x \in E$, $y_1, y_2, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}\big((x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y\big) &= \xi(x_1 + x_2, y) - \xi(x_1, y) - \xi(x_2, y) = 0,\\
\tilde{\xi}\big(x \otimes (y_1 + y_2) - x \otimes y_1 - x \otimes y_2\big) &= \xi(x, y_1 + y_2) - \xi(x, y_1) - \xi(x, y_2) = 0,\\
\tilde{\xi}\big(\lambda(x \otimes y) - (\lambda x) \otimes y\big) &= \lambda\xi(x, y) - \xi(\lambda x, y) = 0,\\
\tilde{\xi}\big(\lambda(x \otimes y) - x \otimes (\lambda y)\big) &= \lambda\xi(x, y) - \xi(x, \lambda y) = 0.
\end{aligned}$$

Il en suit que l'application quotient $\tilde{\xi}$ est bien définie sur $E \otimes F = (E \times F)/I$, et par les propriétés générales des applications quotient, elle est linéaire.

Si réciproquement $\tilde{\xi} : E \otimes F \to G$ est linéaire, alors ξ est sa composition avec l'inclusion canonique $J_{E,F}$ qui est bilinéaire, donc ξ est bilinéaire.

Les valeurs de $\tilde{\xi}$ sont déterminées par ses valeurs sur les tenseurs simples, et pour ceux-là on a $\tilde{\xi}(x \otimes y) = \xi(x, y)$; il est clair alors que la correspondance entre ξ et $\tilde{\xi}$ est bijective. Enfin, elle est linéaire. □

Exemple 3.2. *Soient K, L des espaces topologiques compacts, $E = C(K)$, $F = C(L)$. Alors l'application $\xi : C(K) \times C(L) \to C(K \times L)$ suivante est bilinéaire :*

$$\xi(f, g)(s, t) = f(s)g(t), \qquad s \in K,\ t \in L.$$

On peut noter $f \otimes g$ la fonction $\xi(f, g)$ sur $K \times L$. En général, ξ n'est pas surjective, mais on peut monter avec le théorème de Stone-Weierstrass que son image est dense.

Un cas particulier d'application bilinéaires est le suivant :

Corollaire 3.3. *Soient X, Y des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $J_{X,Y} : X \times Y \to X \otimes Y$ l'inclusion canonique.*

Si $A : E \to X$ et $B : F \to Y$ sont des opérateurs linéaires, alors l'application $(x, y) \mapsto J_{X,Y}\big(Ax, By\big)$ est bilinéaire et définit une application linéaire de $E \otimes F$ dans $X \otimes Y$. On la note $A \otimes B$, et donc

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By.$$

4 Fonctionnelles linéaires

Soient $\varphi \in E^*$, $\psi \in F^*$ des fonctionnelles linéaires sur E et F respectivement. Alors par le précédent, l'application bilinéaire $\xi : E \times F \to \mathbb{K}$,

$$\xi : (x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y),$$

définit une fonctionnelle linéaire sur $E \otimes F$, notée $\varphi \otimes \psi$. L'espace des fonctionnelles bilinéaires sur $E \times F$ est isomorphe à $(E \otimes F)^*$ par le précédent, mais toutes ces fonctionnelles n'ont pas la forme $\varphi \otimes \psi$.

Proposition 4.1. *Si $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une base de E et $(f_\beta)_{\beta \in B}$ une base de F, alors*

$$\{e_\alpha \otimes f_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$$

est une base de $E \otimes F$. En dimension finie on a donc $\dim E \otimes F = d_E \cdot d_F$.

Démonstration. On définit les fonctionnelles coordonnées sur E et F :

$$e_\alpha^*\Big(\sum x_\alpha e_\alpha\Big) = x_\alpha, \qquad f_\beta^*\Big(\sum y_\beta f_\beta\Big) = y_\beta.$$

Sur $z = \sum z_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes f_\beta \in E \otimes F$, on a

$$(e_\alpha^* \otimes f_\beta^*)(z) = z_{\alpha\beta};$$

si $z = 0$, alors $z_{\alpha\beta} = 0$ pour tout α, β, donc les vecteurs $(e_\alpha \otimes f_\beta)$ sont libres. On a déjà vu qu'ils engendrent $E \otimes F$, c'est donc une base. □

Corollaire 4.2. *Pour tout E, on a*

$$E \otimes \mathbb{K} \simeq E.$$

En effet, l'application $x \mapsto x \otimes 1$ est linéaire et surjective ; pour $x \neq 0$ on peut choisir $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, alors $(\varphi \otimes \mathrm{id})(x \otimes 1) = \varphi(x) \neq 0$ donc cette application est aussi injective : c'est un isomorphisme.

Exemple 4.3. *Soit $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ avec les bases standard (e_k), (f_l). Les vecteurs $E_{kl} = e_k \otimes f_l$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m$, sont une base de $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$. [Le raisonnement est identique pour tout corps $\mathbb{K}$.] Tout tenseur $a \in E \otimes F$ s'écrit alors comme*

$$a = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_{kl} e_k \otimes f_l = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_{kl} E_{kl},$$

et on peut l'identifier avec une matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ de coordonnées $A_{kl} = a_{kl}$. C'est un isomorphisme linéaire.

L'application $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ est bilinéaire de $E^* \times F^*$ dans $(E \otimes F)^*$: pour $x \in E$, $y \in F$

$$\big((\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi\big)(x \otimes y) = \lambda\varphi_1(x)\psi(y) + \varphi_2(x)\psi(y),$$
$$\big(\varphi \otimes (\lambda\psi_1 + \psi_2)\big)(x \otimes y) = \varphi(x)\lambda\psi_1(y) + \varphi(x)\psi_2(y).$$

On obtient donc une application linéaire $J_* : E^* \otimes F^* \to (E \otimes F)^*$.

En général, toutes les fonctionnelles linéaires ne se décrivent pas de cette façon ; mais c'est le cas en dimension finie.

Proposition 4.4. *Si E et F sont de dimension finie, alors J_* est un isomorphisme, donc*

$$(E \otimes F)^* = E^* \otimes F^*.$$

Démonstration. Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ une base de E et $(f_\beta)_{\beta\in B}$ une base de F. Pour tout $\Phi \in (E \otimes F)^*$ on a

$$\Phi\Big(\sum_{\alpha,\beta} z_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes f_\beta\Big) = \sum_{\alpha,\beta} z_{\alpha\beta}\Phi(e_\alpha \otimes f_\beta) = \sum_{\alpha,\beta}(e^*_\alpha \otimes f^*_\beta)(z)\Phi(e_\alpha \otimes f_\beta).$$

Avec les coefficients $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi(e_\alpha \otimes f_\beta)$, on a alors la décomposition (finie)

$$\Phi = \sum_{\alpha,\beta} \Phi_{\alpha\beta}\, e^*_\alpha \otimes f^*_\beta.$$

En particulier, J_* est surjective. Mais comme

$$\dim(E^* \otimes F^*) = \dim E^* \cdot \dim F^* = \dim E \cdot \dim F,$$
$$\dim(E \otimes F)^* = \dim(E \otimes F) = \dim E \cdot \dim F,$$

J_* est bien un isomorphisme. $\square$

On peut l'écrire en une autre forme, toujours en dimension finie, en sachant que $E^{**} \simeq E$ et $F^{**} \simeq F$:

$$E \otimes F = (E^* \otimes F^*)^*.$$

Ce dernier espace est isomorphe à l'espace des fonctionnelles bilinéaires de $E^* \times F^*$ dans $\mathbb{K}$, et on aurait même pu définir $E \otimes F$ comme tel. A rappeler quand même qu'on voudrait considérer la dimension quelconque.

5 Isomorphisme avec les espaces d'opérateurs

Proposition 5.1. *Il existe une inclusion naturelle $\xi : E^* \otimes F \simeq L(E, F)$ (linéaire injective). Si E et F sont de dimension finie, c'est un isomorphisme.*

Démonstration. Si $u = \sum_k \varphi_k \otimes y_k \in E^* \otimes F$, alors on peut définir $\xi(u) : E \to F$ par

$$\xi(u)(x) = \sum_k \varphi_k(x) y_k.$$

On obtient évidemment un opérateur linéaire et donc une application $\xi : E^* \otimes F \to L(E, F)$. Il est facile de voir qu'elle est linéaire en u.

Pour montrer que ξ est injective, supposons que u est de la forme ci-dessus et (y_k) sont libres (c'est toujours possible). Si $\xi(u) = 0$, alors $\varphi_k(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et k, donc $\varphi_k = 0$ et $u = 0$.

Supposons maintenant que E et F sont de dimension finie, avec les bases $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(f_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ respectivement. On a pour $x \in E$

$$\xi(e_k^* \otimes f_l)(x) = e_k^*(x) f_l.$$

Pour tout $A \in L(E, F)$ et $x \in E$,

$$Ax = A(\sum x_k e_k) = \sum x_k T e_k = \sum x_k A_{kl} f_l,$$

où $A_{kl} = f_l^*(Ae_k)$. On peut alors écrire

$$A = \sum_{k,l} A_{kl}\, \xi(e_k^* \otimes f_l) = \xi\Big(\sum_{k,l} T_{kl} e_k^* \otimes f_l\Big),$$

donc ξ est surjective. □

On écrit souvent, en omettant ξ,

$$A = \sum_{k,l} A_{kl}\, e_k^* \otimes f_l,$$

et en reformulant encore une fois, on retrouve l'isomorphisme

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \simeq L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^{*n} \otimes \mathbb{K}^m \simeq \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m.$$