Topologie et analyse fondamentale

Yulia Kuznetsova

11 mai 2025

Cable de

Chapitre 1

E

1.1 Co

Convergence

- Ponctuelle, si l'ensemble e
- En particulier : to
  de dimension infinie
- distributions
- Forte / faible d'o
- to

1.1.1 Co

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toute le X. Une to X e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ telle que :*

- $\emptyset, X \in \tau$;
- *si* $U, V \in \tau$ *alors* $U \cap V \in \tau$;
- *si* $U_i \in \tau$ *pour tout* $i \in I$, *alors* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Théorème 1.1.2. *Soit X un e sens métrique» forment une to X.*

Exemple

1. e
   - $\mathbb{R}^n$
   - ℓ^p, c_0

- ⋆ $C(K)$, $B(H)$
- ⋆ l'e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. La to
3. La to
4. Sur $X = \{a, b\}$ on peut définir la to $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

Définition 1.1.3. *Une to X e $x, y \in X$, si $x \neq y$, alors il existent de $U \supset x$, $V \supset y$ tel $U \cap V = \emptyset$. On dit alors que X e*

Le

1.1.2 Voisinage, base de to

Définition 1.1.4. *Un voisinage de $x \in X$ e W de X contenant un ouvert U such that $x \in U \subset W$. L'ensemble de tous le voisinage x sera noté $\mathcal{V}(x)$.*

Si X e $W \in \mathcal{V}(x)$ ssi W contient une boule $B(x, r)$, $r > 0$.

Une façon de définir la to

Pro 1.1.5. *Soit $\mathcal{B}_0$ une famille de partie X dont la réunion e X. On po*

$$\mathcal{B} = \{E_1 \cap \cdots \cap E_n : n \in \mathbb{N}, \forall j \ \ E_j \in \mathcal{B}_0\}$$

et

$$\tau = \{\bigcup_{i \in I} B_i : I \text{ quelconque, } \forall i \ \ B_i \in \mathcal{B}_0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors τ e X.

On peut aussi remarquer que $W \in V(x)$ ssi W contient un ensemble $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

Exemple

5. La to $\mathbb{R}$ e
   intervalle $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Soit $f \in C([0, 1])$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on po

$$U_{t,\varepsilon}(f) = \{g \in C([0, 1]) : |f(t) - g(t)| < \varepsilon\}.$$

Soit ensuite

$$\mathcal{B}_0 = \{U_{t,\varepsilon}(f) : t \in [0,1], \varepsilon > 0, f \in C([0,1])\}.$$

La to $\mathcal{B}_0$ e
(ponctuelle). English : pointwise convergence.

Inversement, une famille $\mathcal{B} \subset \tau$ telle que tout ouvert e
de partie $\mathcal{B}$ e τ. Il peut y avoir plusieurs.
Une partie $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ e x si
pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$ il existe $U \in \mathcal{B}(x)$.

Exemple : $\mathcal{B}(x) = \{B(x,r) : r > 0\}$ dans un e

Enfin, soit une famille $\mathcal{B}_0 \subset \tau$ telle que le
élément τ. On dit alors que $\mathcal{B}_0$ e
de τ.

1.1.3 Suite

Définition 1.1.6. *Une suite (x_n) converge vers $x \in X$ si pour tout voisinage $W \in \mathcal{V}(x)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $x_n \in W$.*

Exemple

- ⋆ Dans $X = \mathbb{R}$: il suffit de considérer $W =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$.
- ⋆ Dans un e $W = B(x,r)$, $r > 0$.

Exercice 1.1.7. *Dans la to*
vers tous le

1.1.4 Fermé

Définition 1.1.8. *Le X sont le*
de X. L'adhérence (ou la fermeture) $\overline{A}$ d'une partie $A|subsetX$ e
l'intersection de tous le A ; c'e
contenant A. Si $\overline{A} = X$, on dit que A e X.

Exemple

- ⋆ Si A e $A = \overline{A}$.
- ⋆ Dans l'exemple 4, le $\{\emptyset, \{b\}, X\}$. Soit $A = \{a\}$, alors $\overline{A} = X$.

Exercice 1.1.9. $x \in \overline{A}$ ssi $W \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage W de x.

Exemple 1.1.10. Soit $X = C([0,1])$ avec la to

et soit $D = \{f \in X : 0 \leqslant f \leqslant 1,\ \int f = 1/2\}$. On voit facilement que pour tous $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ il existe $f \in D$ telle que $f(t_1) = \cdots = f(t_n) = 0$. Cela implique que $0 \in \overline{D}$.

——————————— (fin du cours 1) ———————————

Or, 0 n'e D : si $f_n \in D$ pour tout n et $f_n \to 0$ simplement, alors par le théorème de la convergence dominée $\int f_n \to 0$, ce qui n'e

1.1.5 Co

Définition 1.1.11. Soit (X, τ) un e $A \subset X$. La to A e $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$.

Remarque 1.1.12. τ_A e A : elle contient $\emptyset$ et A, puis $(U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A$, et $\cup_i (U_i \cap A) = \big(\cup_i U_i\big) \cap A$.

C'e

exemple de la to $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sur $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$...

Définition 1.1.13. X e $\tau = \mathcal{P}(X)$. Une partie A e dite discrète si $\tau_A = \mathcal{P}(A)$.

Pro 1.1.14. A e X ssi tout singleton $\{a\}$, $a \in A$, e τ_A, et ssi pour tout $a \in A$ il existe $U \in \tau$ tel que $A \cap U = \{a\}$.

Exemple

1. $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ e $n =]n-1, n+1[$.
2. $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ n'e $U \subset \mathbb{R}$ contenant 0 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$ on a $1/n \in U$, donc $U \cap A \neq \{0\}$.
3. $B = A \backslash \{0\}$ e $n > 1$, on a $\frac{1}{n} = B \cap]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$, et aussi $\{1\} = B \cap]\frac{1}{2}, 3[$.

1.2 A

Définition 1.2.1. Soit X, Y de $f : X \to Y$ une application. On dit que f e $f^{-1}(U)$ e ouvert $U \subset Y$.

Dans le cas métrique, on retrouve le

Pro 1.2.2. Si X et Y sont de f
e $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

Démonstration. Soit f continue. Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble
$B(f(x),\varepsilon)$ e
x et alors une boule $B(x,\delta)$ avec $\delta > 0$.

Réciproquement, suppo f vérifie la condition $\varepsilon - \delta$. Soit $U \subset Y$ un ouvert et $V = f^{-1}(U)$. Pour tout $x \in V$ on a $y = f(x) \in U$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset U$. Soit $\delta > 0$ tel que $f(B(x,\delta)) \subset B(y,\varepsilon)$, alors $B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon)) \subset f^{-1}(U) = V$; on conclut que V e
ouvert. □

Exemple 1.2.3. 1. Soit τ la to X. Alors toute application $f : X \to Y$ e Y quelconque. Au contraire, $f : Z \to X$ e $f^{-1}(\{x\})$ e
pour tout $x \in X$.
Exemple concret : $X = \mathbb{Z}$, il e
$f : t \mapsto [t]$ (la partie entière) e $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. En réalité, seule $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, ce qu'on montrera plus tard en discutant la connexité.

2. Soit τ la to X. Alors toute application $f : Z \to X$ e Z quelconque : on a toujours $f^{-1}(X) = Z$ et c'e
Si maintenant on a $f : X \to Y$, alors $f^{-1}(U)$ doit être $\emptyset$ ou X pour tout ouvert U de Y ; si Y e f e
constante.
Et sans sé
exemple, toute fonction de $\mathbb{R}$ discrète dans $\mathbb{R}$ gro
nue !

À rappeler : on ne peut pas en général caractériser la continuité par de f e $x_n \to x$, on aura bien sûr $f(x_n) \to f(x)$. Or l'inverse n'e

Exemple 1.2.4. *(non inclut dans le cours) Soit $X = C[0,1]$ en to logie de la convergence simple, et soit $A = \{f \in X : -1 \leqslant f \leqslant 1\}$ avec la to* $I : f \mapsto \int_0^1 f$ *vérifie la pro de convergence dominée). Or $E = I^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ n'e $0 < \varepsilon < 1/2$: on a $0 \in E$, mais dans tout voisinage W de 0 il y a de fonctions à l'intégrale $1/2$ donc E ne contient aucun voisinage ouvert de 0.*

Définition 1.2.5. *Une application $f : X \to Y$ e pour tout ouvert $U \subset X$ l'image $f(U)$ e* Y. *f e un homéomorphisme si elle e* f, f^{-1} *sont ouverte*

Remarque : une application continue <u>bijective</u> f e phisme ssi elle e

Exemple 1.2.6.

1. *$X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On a $f(\mathbb{R}) =]0,1]$ ce qui n'e* f *n'e*
2. *$X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On po $f(t) = e^{it}$; cette application e*
3. *$X = [0, 2\pi[$, $Y = \mathbb{T}$, $f(t) = e^{it}$. Alors f e mais pas ouverte : $U = [0, \pi[$ e* X, *mais son image ne l'e*
4. *$B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$; l'application $f : B \to \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \mapsto n$ e tous le* f, f^{-1} *sont continue* f *e*

(fin du cours 2)

1.3 Co

Soient (X, τ) et (Y, ρ) de logie sur $X \times Y$ en donnant sa base :

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \rho\}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ e to σ sur $X \times Y$, appelée la to élément $\mathcal{B}$ pour ouvert

Pro 1.3.1. Le p_X, p_Y sont continue
verte

Démonstration. Si $U \subset X$ e $p_X^{-1}(U) = U \times Y$, ouvert par définition. Cela montre que p_X e p_Y.

Soit maintenant $W \subset X \times Y$ un ouvert. Pour tout $(x, y) \in W$, il existe un ouvert de base $U \times V$ tel que $U \in \tau$, $V \in \rho$ et $(x, y) \in U \times V \subset W$. Alors $p_X(W) \supset p_X(U \times V) = U$, donc tout $x \in p_X(W)$ y e
voisinage ouvert ; cela veut dire que p_X e
e p_Y. □

Si X, Y sont de $B(x, r) \times B(y, r)$ e
de rayon r centrée en (x, y) selon la distance

$$d : \big((s, t), (u, v)\big) \mapsto \max\big(d_X(s, u), d_Y(t, v)\big).$$

On retrouve donc la même to

Pour une famille finie $X_1, \ldots, X_n$ on définit le produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ soit par la récurrence, soit directement (avec le même ré
base de to X e $U_1 \times \ldots U_n$ ou chaque U_i e
ouvert dans X_i. Si X_i sont métrique
distance

$$d_X\big(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \max\{d_{X_i}(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

On sait ce $\mathbb{R}^n$ sont équivalente
le

$$d_X^p\big(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} d_{X_i}(x_i, y_i)^p\Big)^{1/p},$$

$1 \leqslant p < \infty$, sont équivalente d_X.

La situation e
teurs $(X_i)_{i \in I}$. Sur $X = \prod_{i \in I} X_i$, on peut définir même deux to
qui coïncident dans le cas d'un produit fini : la to
choix principal) et la «to

Mais avant discutons un peu l'ensemble X. Il consiste de $(x_i)_{i \in I}$ où $x_i \in X_i$ pour chaque i ; on peut dire aussi qu'il
fonctions $x : I \to \cup_i X_i$ telle $x(i) \in X_i$ pour chaque i. Par exemple, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'e

On considère ensuite le $J \subset I$ fini et $U_i \in \tau_i$, $i \in J$, on po

$$W_{J,(U_i)_{i\in J}} = \{x \in X : \forall i \in J \;\; x_i \in U_i\}.$$

Par exemple, si $X_i = \mathbb{R}$ et $U_i = B(t_i, \varepsilon)$, on a $W = \{x \in \mathbb{R}^I : \forall i \in J \;\; |x_i - t_i| < \varepsilon\}$. Ce

$$W_{J,(U_i)_{i\in J}} = \prod_{i\in I} U_i : \;\; \forall i \in I \setminus J \;\; U_i = X_i.$$

Définition 1.3.2. Soit $((X_i, \tau_i))_{i\in I}$ une famille d'e
La to $X = \prod_{i\in I} X_i$ e
base suivante :

$$\mathcal{B} = \Big\{W_{J,(U_i)_{i\in J}} : \;\; J \subset I \text{ fini, } \forall i \in J \;\; U_i \in \tau_i, \;\; \forall i \in I \setminus J \;\; U_i = X_i\Big\}.$$

On vérifie que $\mathcal{B}$ e
Dans le cas où I e
celle définie avant.

Exemple 1.3.3. Soit $I = [0, 1]$ et $E = \mathbb{R}^I$. En utilisant de
un peu différente $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, $t_1, \dots, t_n \in I$ nous avons de

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon,t_1,\dots,t_n}(f) &= \{g \in E : |f(t_k) - g(t_k)| < \varepsilon\} \\ &= \{g \in E : \forall t \in J = \{t_1, \dots, t_n\} \;\; g(t) \in B\big(f(t), \varepsilon\big)\}. \end{aligned}$$

Ce sont de $\mathcal{B}$, et chaque ouvert de $\mathcal{B}$ en contient un de ce
ty f. Ce
base de la to

Sur $C(I) \subset \mathbb{R}^I$, la to
convergence simple : nous retrouvons le

Cette construction e I.

Exemple 1.3.4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec la to $]0,1[\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$
e $x = (x_n)$ tel que $x_0 \in]0, 1[$. L'ensemble

$$]0,1[^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \;\; x_n \in]0, 1[\}$$

n'e $\mathcal{B}$. (On peut noter que pour tout $W \in \mathcal{B}$ on a $\sup_{x\in W, n\in\mathbb{N}} |x_n| = \infty$.)

La to $\prod_{i\in I} U_i$
sans conditions sur U_i, l'ensemble $]0,1[^{\mathbb{N}}$ e
to

La raison principale pour préférer la to
le produit d'une famille de compact
Tychonoff.

Pour le moment, nous démontrons seulement deux pro

Pro 1.3.5. *Soit* $((X_i,\tau_i))_{i\in I}$ *une famille d'e*
non-vide X *leur produit (avec la to*

- ⋆ *Le* $p_i : (x_j)_{j\in I} \mapsto x_i$ *sont continue*
  tout $i \in I$.
- ⋆ X *e* X_i *e*

Démonstration. (1) La preuve e
de deux facteurs : pour tout $U_i \in \tau_i$ on a $p_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\in J} V_j$ où $V_i = U_i$
et $V_j = X_j$ si $j \neq i$. Cet ensemble e p_i e
montre sur le

——— (fin du cours 3) ———

(2) Suppo X e $j \in I$ et $x_j, y_j \in X_j$ distinct
Pour tout $i \neq j$, on choisit $x_i \in X_i$ quelconque ; on po $y_i = x_i$ pour
tout $i \neq j$. Le $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ sont distinct X, il existe
alors deux ouvert U, V de X tel $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. On
peut suppo $U = \prod U_i$ et $V = \prod V_i$.
On a $x_j = p_j(x) \in p_j(U) = U_j$ et $y_j = p_j(y) \in p_j(V) = V_j$; ce sont de
ouvert X_j. Suppo $z \in U_j \cap V_j$. En
po $z_i = x_i$ pour $i \neq j$, on obtiendrait alors $z = (z_i) \in U \cap V$, ce qui
e $U_j \cap V_j$ e
que X_j e

Réciproquement, soit chaque X_j sé $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ sont
deux point X distinct $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$. On
peut choisir $U_j, V_j \in \tau_j$ tel $U_j \cap V_j = \emptyset$ et $x_j \in U_j$, $y_j \in V_j$. En
po $U_i = V_i = X_i$ pour tout $i \neq j$, on obtient deux ouvert $U = \prod U_i$
et $V = \prod V_i$ à l'intersection vide tel $x \in U$ et $y \in V$. □

1.4 Compacité

Dans le cours de
deux définitions d'un e
métrique :

Définition 1.4.1 (cas métrique). Soit X un e
que X e $(x_n) \subset X$ admet une sous-suite convergente.

La deuxième e

Définition 1.4.2. Soit X un e X e
s'il e X admet un sous-recouvrement fini. Autrement dit, si $(U_i)_{i\in I}$ sont de $X \subset$
$\cup_{i\in I} U_i$, alors il existe $J = \{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ fini tel que $X \subset \cup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

Une partie $A \subset X$ e
to

Attention, en général aucune de ce
l'autre !

Anglais : a compact space is not nece
de sé

Exemple 1.4.3. ⋆ Dans $\mathbb{R}^n$, le
tie
⋆ Dans un e
n'e
⋆ Tout ensemble fini sé

Un ensemble non métrique compact : $[0,1]^{\mathbb{R}}$ (à venir) ; la boule unité
dans un e
dans le cours du S9 du M2 recherche).

En passant aux complément
lente :

Pro 1.4.4. Soit X un e X
e $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ dont toute partie finie a l'intersection non-vide, l'intersection de la famille entière
$\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ e

Démonstration. Soit X compact. Pour tout $i \in I$, on po $U_i = X \setminus F_i$. Si par l'ab $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$, on aurait $\cup_{i \in I} U_i = X$. Par la compacité, on pourrait choisir un sous-recouvrement fini : $i_1, \ldots, i_n \in I$ tel $X = \cup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. Mais alors $\cap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$, ce qui n'e
l'hy

La réciproque e

□

Si X n'e
suite une sous-suite convergente. Mais on peut montrer le suivant :

Pro 1.4.5. Si X e
$A \subset X$ admet un point d'accumulation : un point $p \in X$ tel que tout voisinage $V \in \mathcal{V}(p)$ a l'intersection infinie avec A.

Démonstration. Suppo $p \in X$ admet un voisinage V_p qui a l'intersection finie avec A. On peut suppo que V_p e $\{V_p : p \in X\}$ e recouvrement ouvert de X ; on peut en choisir un sous-recouvrement fini $\{V_{p_k} : k = 1, \ldots, n\}$. Mais alors $A \subset \cup_{k=1}^{n} (A \cap V_{p_k})$ e
e □

Il n'y a pas d'implication réciproque.

1.4.1 Le lien entre le

Pro 1.4.6. Soit X un e

1. Si $A \subset X$ e A e
2. Si A e $B \subset A$ e B e

Démonstration. (1) Soit A compacte et $p \in X \setminus A$. Comme X e
pour tout $a \in A$ il existe un ouvert $U_a \in \mathcal{V}(a)$ qui ne contient pas p, et il existe un ouvert $V_a \in \mathcal{V}(p)$ qui n'intersecte pas U_a. La famille $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ e A. Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$. Mais dans ce cas

$$p \in \cap_{k=1}^{n} V_{a_k} \subset X \setminus \cup_{k=1}^{n} U_{a_k} \subset X \setminus A;$$

l'ensemble $X \setminus A$ e A fermé.

(2) Soit A compacte et $B \setminus A$ fermée (dans A ou dans X, c'e
équivalent par la partie (1)). Si $(U_i)_{i \in I}$ e

de B (par de V_i de A tel que $V_i \cap B = U_i$ pour tout i ; par l'hy $A \setminus B$ e

$$A \subset \cup_{i \in I} V_i \cup (A \setminus B).$$

On peut en choisir un sous-recouvrement fini de A. Mais en intersection avec B, ce sous-recouvrement donnera uniquement un nombre fini de U_i car $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$. On peut alors extraire un sous-recouvrement fini de (U_i), ce qui montre que B e □

Exemple 1.4.7. *L'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ e*

Théorème 1.4.8. *L'image continue d'un compact e condition d'être sé*

Démonstration. Soit X, Y de $f : X \to Y$ continue. On peut suppo $f(X) = Y$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Y. Le $V_i = f^{-1}(U_i)$ sont ouverte X ; on peut alors en choisir un sous-recouvrement fini $V_{I_1}, \ldots, V_{i_n}$. Le $(U_{i_k})_{k=1}^n$ seront alors un recouvrement fini de Y. □

Exemple 1.4.9. *Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ e courbe $\varphi([a, b])$ e*

Fait : tout e $\mathcal{C}$. (DM ?)

(fin du cours 4)

Théorème 1.4.10. *Si X e Y sé $f : X \to Y$ une bijection continue, alors f e*

Démonstration. Par le précédent, Y e f e bijection, il existe la fonction inverse f^{-1}. Pour tout ouvert $U \subset X$, son complément $F = X \setminus U$ e compact. L'image $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ e Y. Par conséquence, $Y \setminus f(F)$ e f e $Y \setminus f(F) = f(X \setminus F) = f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$. Cela montre que f^{-1} e continue et f e □

[Rappel : Ce n'e $t \mapsto e^{it}$ de $[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{T}$.]

Un cas particulier important :

Corollaire 1.4.11. *Si X e τ' e plus faible sur X (c.à.d. $\tau' \subset \tau$), alors en réalité $\tau' = \tau$.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'application identité. □

1.4.2 Ensemble

(Non fait en cours, connu du cours d'e

Définition 1.4.12. *Une partie $A \subset X$ d'un e*
X e $\bar{A}$ e
Anglais : a relatively compact set.

Exemple 1.4.13. *Dans $\mathbb{R}^n$, une partie e*
bornée.

Une de $C[a,b]$ sera donné par le théorème d'Arzela-A

Dans le cas métrique, on peut donner une de par l'adhérence.

Définition 1.4.14. *Soit X un e $A \subset X$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, un ε-ré A e $R \subset X$ tel que pour tout $a \in A$ il existe $r \in D$ tel que $d(a, r) < \varepsilon$.*

Exemple 1.4.15.
- ⋆ *X e ε-ré partie $A \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$.*
- ⋆ *On admet que pour $A = \emptyset$, toute partie D e ε-ré tout $\varepsilon > 0$.*
- ⋆ *Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble $R = \varepsilon\mathbb{Z}^n$ e ε-ré A e borné, on peut en choisir en ε-ré*

Définition 1.4.16. *Une partie A d'un e X e précompacte ssi pour tout $\varepsilon > 0$ elle admet un ε-ré*

Théorème 1.4.17. *Une partie A d'un e X*
e

Démonstration. (⇒)

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Le $\{B(x, \varepsilon) : x \in \bar{A}\}$ sont un recouvrement ouvert de $\bar{A}$. On peut en choisir un sous-recouvrement fini $\{B(x_k, \varepsilon) : k = 1, \ldots, n\}$, avec $x_k \in \bar{A}$. Alors, $A \subset \bar{A} \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$, donc $\{x_k : k = 1, \ldots, n\}$ e ε-ré A.

$\Leftarrow$ Soit (x_n) une suite dans A. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existent de 2^{-m}-ré R_m ; on a alors $A \subset \cup_{r \in R_m} B(r, \varepsilon)$. Il existe au moins un $r \in R_1$ tel que l'ensemble $I_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(r, 1/2)\}$ e
Ensuite, pour chaque $m \geqslant 2$ il existe $r_m \in R_m$ tel que l'ensemble $I_m = \{n \in I_{m-1} : x_n \in B(r_m, 2^{-m})\}$ e
récurrence $\varphi(m) \in I_m$ pour chaque m de sorte que $\varphi(m+1) > \varphi(m)$. La suite $(x_{\varphi(m)})$ aura la pro $l \geqslant m$

$$d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(l)}) \leqslant d(x_{\varphi(m)}, r_m) + d(r_m, x_{\varphi(l)}) < 2^{1-m}.$$

C'e X et sa limite e
dans $\bar{A}$. □

1.4.3 Lemme de Zorn

Ce lemme extrêmement utile e
démontre pas, et il e
ensemble

Définition 1.4.18. *Un ensemble E e*
relation binaire $\leqslant$ qui e

- *réflexive : $x \leqslant x$;*
- *transitive : $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ implique $x \leqslant z$;*
- *antisymétrique : $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ implique $x = y$,*

pour tous $x, y, z \in E$.

E e
rable E : $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$.

Exemple 1.4.19. *$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ sont totalement ordonné $\mathbb{Z}^2$ avec l'ordre*

$$(n, m) \leqslant (n', m') \text{ ssi } n \leqslant m \text{ et } n' \leqslant m'$$

e $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparable

Exemple 1.4.20. *Si $E \subset \mathcal{P}(X)$, alors l'inclusion définit une relation d'ordre.*

Définition 1.4.21. *Une partie C d'un ensemble ordonné E e*
pelée une chaîne si elle e

Exemple 1.4.22. *L'ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ e $\mathbb{Z}^2$.*

Définition 1.4.23. Une partie A d'un ensemble ordonné E e
majorée s'il existe $m \in E$ tel que $a \leqslant m$ pour tout $a \in A$. On appelle m un majorant de A. Un majorant de E e
(il ne peut y avoir qu'un). Un élément $m \in E$ e
$m \leqslant x$ implique $m = x$ pour tout $x \in E$.

Exemple 1.4.24. $]-\infty, 0[$ e $\mathbb{R}$, mais ne po
d'élément le plus grand ni maximal.

Dans la partie $\{(0,1),\ (1,0)\}$ dans $\mathbb{Z}^2$, chacun de
maximal, mais aucun n'e

Pro 1.4.25. Si $\mathcal{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$, alors il existe un élément maximal de cet ensemble : $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_k \leqslant x_j$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. On commence par po $y = x_1$. Si $y < x_2$, on le change en po $y = x_2$, sinon on a forcément $y \geqslant x_2$. On continue ce procédé pour k entre 2 et n. Par construction, on a $y \geqslant x_k$ pout tout k, et y coïncide avec l'un de (x_k). □

Théorème 1.4.26 (lemme de Zorn). Si E e
non vide où toute chaîne e E admet un élément maximal.

Théorème 1.4.27. Tout e

Démonstration. Soit V un e
à démontrer. Sinon il existe $x \in V$ non nul.

On considère l'ensemble E de V, ordonné par l'inclusion. Si $\mathcal{C} = \{B_i\}_{i \in I} \subset E$ e E, alors sa réunion

$$B = \cup_{i \in I} B_i$$

e $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$ e $b_k \in B$, alors pour chaque k il existe $i_k \in I$ tel $b_k \in B_{i_k}$. Par Pro
1.4.25, il existe une partie B_{i_l} maximale parmi B_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$. On a donc $b_k \in B_{i_l}$ pour tout k. Mais cette famille e $\lambda_k = 0$ pour tout k. On conclut que $B \in E$, et évidemment B majore $\mathcal{C}$. Le
tion du lemme de Zorn sont donc remplie
maximale B dans E. Cette famille e
une base car sinon on aurait pu y ajouter un vecteur de plus. □

1.4.4 Théorème de Tychonoff

Ce théorème utilise le lemme de Zorn.

Théorème 1.4.28. *Soient $((X_i, \tau_i))_{i \in I}$ de*
vide $X = \prod_{i \in I} X_i$ *e*
X_i *e* i.

Démonstration. (⇒) Si X e X_i e
Pro

(⇐) La preuve e
divise en plusieurs étape

1. On dira qu'une famille d'ensemble $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e
   X si toute collection finie de se
   vide : $\cap_{k=1}^{n} F_{\alpha_k} \neq \emptyset$.
2. Soit $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une famille *centrée* de fermé X.
   On considère l'ensemble E de toute $\mathcal{G}$ de
   partie X (pas forcément de fermé $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Cet
   ensemble e $\mathcal{C} \subset E$ e
   majorée par la réunion de tous se $\mathcal{C} = \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ et
   $\mathcal{G} = \cup_{i \in I} \mathcal{G}_i$, alors
   - ⋆ évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$;
   - ⋆ si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$, alors il existe pour chaque k un $i_k \in I$ tel que $A_k \in \mathcal{G}_{i_k}$; il existe par Pro $\mathcal{G}_{i_l}$
     maximale, alors $A_k \in \mathcal{G}_{i_l}$ pour tout k. Comme $\mathcal{G}_{i_l}$ e
     $\cap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$.

   La partie $\mathcal{G}$ e E et majore $\mathcal{C}$, et on e
   hy
   une famille maximale $\mathcal{G}$ dans E.

——————— (fin du cours 5) ———————

3. On montre ensuite que
   (a) Si $A_k \in \mathcal{G}$, $k = 1, \ldots, n$, alors $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{G}$. (sinon $\mathcal{G} \cup \{\bigcap_{k=1}^{n} A_k\}$ serait toujours centrée, et dans E.)
   (b) si $A \subset X$ e $A \cap B \neq \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{G}$, alors $A \in \mathcal{G}$. (Sinon $\mathcal{G} \cup \{A\}$ serait centrée, car $\cap_{k=1}^{n}(B_k \cap A) = (\cap_{k=1}^{n} B_k) \cap A$
   e $\mathcal{G}$ par l'hy $B_k \in \mathcal{G}$.)

4. Soit $i \in I$, soit $p_i : X \to X_i$ la pro $\mathcal{G}_i = \{\overline{p_i(A)} : A \in \mathcal{G}\}$. Alors c'e X_i : si $A_k \in \mathcal{G}$, $k = 1, \ldots, n$, alors

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{p_i(A_k)} \supset \bigcap_{k=1}^{n} p_i(A_k) \supset p_i(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \neq \emptyset.$$

Ce X_i, il existe alors $x_i \in \cap\mathcal{G}_i = \cap\{F : F \in \mathcal{G}_i\}$.

5. Soit W_i un voisinage ouvert de x_i dans X_i. Pour tout $A \in \mathcal{G}$ on a $x_i \in \overline{p_i(A)}$, donc $W_i \cap p_i(A) \neq \emptyset$ et par conséquence $p_i^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset$. Par la pro $p_i^{-1}(W_i) \in \mathcal{G}$.

6. Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ avec le x_i définis dans 4. Tout voisinage ouvert U de x contient un voisinage de base $W = \prod_{i \in I} W_i$ tel que $W_i = X_i$ pour $i \in I \setminus J$ et J e $W = \cap_{i \in J} p_i^{-1}(W_i)$. Par 5 et 3(a), on a $W \in \mathcal{G}$.

7. Pour tout $A \in \mathcal{G}$ et tout $U \in \mathcal{V}(x)$ on a alors $U \cap A \neq \emptyset$, par 5 et car $\mathcal{G}$ e $x \in \overline{A}$.
En particulier, c'e $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Mais le $\mathcal{F}$ sont fermé $x \in \cap\{F : F \in \mathcal{F}\}$.

8. Par Pro X e

□

Exemple 1.4.29. On dispo
«grands» compact $[0,1]^I$ quel que soit I, $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ etc.

On rappelle que l'ensemble fini discret $\{0,1\}$ e
$\{0,1\}^I$ aussi, pour tout I.

On peut montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e
tor ; ou bien on peut le considérer tel quel et démontrer le «Fait» du cours précédent avec.

On peut montrer aussi que $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ n'e
pact, c.à.d. il existe une suite qui n'admet pas de sous-suite convergente.

1.5 Connexité

Définition 1.5.1. Un e E e
peut pas être re

$E = U \cup V$ avec U, V ouvert $U \cap V = \emptyset$ implique $U = E$ ou $V = E$.

Une partie $A \subset E$ e E si elle e en to $A \subset U \cup V$, où U, V sont de E et $(U \cap V) \cap A = \emptyset$, implique $A \subset U$ ou $A \subset V$.

Exemple 1.5.2. $\mathbb{Z}$ n'e $\mathbb{R}$: on a

$$\mathbb{Z} \subset]-\infty, 0[\cup]-1, +\infty[.$$

À noter que ce $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 1.5.3. Soit E un e E e si et seulement si l'une de rifiée :

1. $E = F \cup H$ avec F, H fermé $F \cap H = \emptyset$ implique $F = E$ ou $H = E$;
2. Le E et $\emptyset$;
3. Toute fonction continue $f : E \to \{0,1\}$ (en to $\{0,1\}$) e

Démonstration. (déf.) $\Longrightarrow$ (1) : si E e $E = F \cup H$ avec F, H comme dans (1), on peut po $U = E \setminus F$, $V = E \setminus H$. Ce sont de ouvert $F \cap H = \emptyset$ implique $E = U \cup V$ tandis que $E = F \cup H$ implique $U \cap V = \emptyset$. On doit avoir alors soit $U = E$ donc $F = \emptyset$ et $H = E$, soit $V = E$ d'où $H = \emptyset$ et $F = E$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : si $A \subset E$ e $F = A$ et $H = E \setminus A$; ce sont deux ouvert $A = E$ soit $H = E$ et $A = \emptyset$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : si $f : E \to \{0,1\}$ e $A = f^{-1}(\{0\})$ e ouvert, mais $E \setminus A = f^{-1}(\{1\})$ e A e suit $A = E$ et $f \equiv 0$ ou bien $A = \emptyset$ et $f \equiv 1$.

(3) $\Longrightarrow$ (déf.) : si U, V sont ouvert $E = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$, on peut po

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U; \\ 1, & x \in V. \end{cases}$$

Le $\{0,1\}$ sont $\emptyset, E, U$ et V, tous ouvert f e $U = E$ ou $V = E$. $\square$

Exemple 1.5.4. $\star$ Un singleton $\{x\}$ e

$\star$ Un intervalle $I =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ e

nue $f : I \to \{0, 1\}$ e I dans $\mathbb{R}$ et

prend toute

constante.

Pro 1.5.5. Soit E, Y de E connexe, et soit $f : E \to Y$ continue. Alors $f(E)$ e Y.

Démonstration. Si U, V sont de Y tel $f(E) \subset U \cup V$ et $U \cap V \cap f(E) = \emptyset$, alors $U' = f^{-1}(U)$, $V' = f^{-1}(V)$ sont ouvert $E = U' \cap V'$ et $U' \cap V' = \emptyset$. On a donc $U' = E$ ou $V' = E$, ce qui implique $E \subset U$ ou $E \subset V$. □

Exemple 1.5.6. Si $I = [a, b]$ et $f : I \to Y$ e Y étant un e $f(I)$ e

e x, y on peut po $I = [0, 1]$ et $f(t) = ty + (1 - t)x$.

Rappel : Un e E e

pour tous $a, b \in E$ il existe $f : [0, 1] \to E$ continue telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Pro 1.5.7. Tout e

Démonstration. Suppo E e

Il existent alors de U, V non vide $E = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$. Soit $a \in U$, $b \in V$ (il

$f : I = [0, 1] \to E$ continue telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$. On a $f(I) \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ et $f(I) \cap U$, $f(I) \cap V$ sont non-vide $f(I)$

e E non connexe, ce qui contredit la pro

cédente. □

Exemple 1.5.8. L'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$E = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{\big(t, \sin\big(\frac{1}{t}\big)\big) : t \in]0, 1]\}$$

e

(fin du cours 6)

Corollaire 1.5.9. Soit E une partie convexe d'un e

normé (en to E e

En général, la réciproque e
vraie :

Pro 1.5.10. *Une partie $A \subset \mathbb{R}$ e*
convexe.

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{R}$ e
n'e $a, b \in A$ tel $[a, b] \not\subset A$. Il existe alors $c \in]a, b[\setminus A$. Mais alors, en po $U =]-\infty, c[$, $V =]c, +\infty[$, on a $A \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, mais $A \not\subset U$ et $A \not\subset V$, donc A n'e □

Corollaire 1.5.11. *Le* $\mathbb{R}$ *sont de*
valle

Démonstration. Le A e
non-vide, soit $a = \inf A$ et $b = \sup A$ (qui peuvent être $-\infty$ et $+\infty$). Pour $c \in A$ quelconque, on a donc $a \leqslant c \leqslant b$. Soit maintenant $c \in]a, b[$. Comme $c > a$, il existe $a_1 \in A$ tel que $a \leqslant a_1 < c$. De même. il existe $b_1 \in A$ tel que $c < b_1 \leqslant b$. Par la convexité, on a $[a_1, b_1] \subset A$, d'où $c \in A$ et enfin $]a, b[\subset A$. Le A e
intervalle. □

1.5.1 Compo

En général, la réunion de connexe n'e
considérer $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Pro 1.5.12. *Soient $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ de*
to X. *Si $\cap_\alpha E_\alpha \neq \emptyset$, alors $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ e*

Démonstration. Choisissons $a \in \cap_\alpha E_\alpha$. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ continue. Chaque E_α e f y e $f(a)$. Elle e $f(a)$ sur E, ce qui prove que E e □

Définition 1.5.13. *Soit X un e $x \in X$, soit $C(x)$ la réunion de toute X contenant x. On appelle $C(x)$ la compo x.*

Théorème 1.5.14.
1. *Pour tout x, l'ensemble $C(x)$ e et connexe.*
2. *Pour tout $x, y \in X$ soit $C(x) = C(y)$, soit $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.*

3. *La relation $x \sim y$ ssi $C(x) = C(y)$ e*
lence sur X ; l'e X e
compo

Démonstration. 1. Pour tout x, le singleton $\{x\}$ e
$C(x)$ e
1.5.12.

2. Soient $x, y \in X$. Si $C(x) \cap C(y)$ e
$z \in X$, alors $C(x) \cup C(y)$ e
Cette réunion e $C(x)$ et $C(y)$,
ce qui implique $C(x) = C(y)$.

3. Évident.

□

Pro 1.5.15. *Tout ouvert U dans $\mathbb{R}$ e*
d'une famille d'intervalle

Démonstration. On vient de démontrer que U e
de se
re $x \in U$, sa compo $C(x)$
e $\mathbb{R}$). Soit $y \in C(x)$. Il existe un intervalle ouvert I tel que $y \in I \subset U$. Cet intervalle e $y \in I \cap C(x)$, donc $I \cup C(x)$
e $C(x)$, il en suit $I \subset C(x)$. Cela montre que $C(x)$ e □

Remarque 1.5.16. *On peut montrer aussi que cette réunion e dénombrable (en choisissant un rationnel dans chaque intervalle).*

Chapitre 2

Fonctions continue

Soit X un e $C(X, \mathbb{R})$ et $C(X, \mathbb{C})$ le
pace X dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ re
assertion s'applique à tous le $C(X)$. Le
e $C_b(X, \mathbb{R})$ et $C_b(X, \mathbb{C})$
re
$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Si $K = X$ e $f(K)$ e
continue f, en particulier, borné ; on a donc $C(K, \mathbb{R}) = C_b(K, \mathbb{R})$ et $C(K, \mathbb{C}) = C_b(K, \mathbb{C})$, et on le
forme.

Théorème 2.0.1 (Dini). *Soit K un compact et (f_n) une suite croissante de fonctions continue K. Si (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, alors cette convergence e*

Démonstration. Il suit de $f = \sup_n f_n$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in K$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_x}(x) > f(x) - \varepsilon$. Par la continuité de f et de f_{n_x}, il existe aussi un voisinage ouvert U_x de x tel que

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \text{ et } |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| < \varepsilon$$

pour tout $y \in U_x$.

Ce K ; on peut en choisir un sous-recouvrement fini $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$. Pour tout $y \in K$, on trouve alors k tel que $y \in U_{x_k}$. En écrivant $n_k = n_{x_k}$ pour simplifier le notations, on a :

$$|f(y) - f_{n_k}(x)| \leqslant |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y)| < 3\varepsilon.$$

Soit maintenant $m = \max\{n_k : k = 1, \ldots, n\}$. On a $f_{n_k} \leqslant f_m \leqslant f$ pour tout k, donc pour tout $y \in K$

$$0 \leqslant f(y) - f_m(y) \leqslant f(y) - f_{n_k}(y) < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème. □

2.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Lemme 2.1.1. Il existe une suite de polynôme (u_n) *qui convergent vers la fonction* $f(t) = \sqrt{t}$ *uniformément sur* $I = [0, 1]$.

Démonstration. On po $u_0 = 0$, et ensuite par récurrence

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - u_n(t)^2\big). \tag{2.1}$$

Par construction, ce sont de

Montrons que $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \sqrt{t}$ pour tout n et tout $t \in [0, 1]$. Pour $n = 0$ c'e $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned}
\sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\big(t - u_n(t)^2\big) \\
&= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} - u_n(t)\big)\big(\sqrt{t} + u_n(t)\big) \\
&= \big(\sqrt{t} - u_n(t)\big)\Big[1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + u_n(t)\big)\Big] \\
&\geqslant \big(\sqrt{t} - u_n(t)\big)\big(1 - \sqrt{t}\big) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La suite croissante (u_n) e u. En passant à la limite dans (2.1), on trouve $u(t) = u(t) + \frac{1}{2}(t - u(t)^2)$, d'où $u(t)^2 = t$. Le u_n étant po $u(t) = \sqrt{t}$. On peut appliquer maintenant le théorème de Dini pour conclure que la convergence e □

(fin du cours 7)

On peut écrire le $u_1(t) = t/2$, $u_2(t) = t - t^2/8$.

Lemme 2.1.2. Soit X *un e* B *une sous-algèbre fermée de* $C_b(X, \mathbb{R})$ *qui contient le toute* $f, g \in B$ *le* $\min(f, g)$ *et* $\max(f, g)$ *sont aussi dans* B.

Démonstration. On vérifie que

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}\Big(f + g + |f - g|\Big) \text{ et } \min(f, g) = \frac{1}{2}\Big(f + g - |f - g|\Big),$$

il suffit alors de montrer que $|f-g| \in B$. Comme $f-g \in B$, on peut simplifier encore la tâche : il faut montrer que pour toute $h \in B$, la fonction $|h| = \sqrt{h^2}$ e B. En divisant par $\|h\|_\infty$, on peut suppo $\|h\|_\infty = 1$.

Soit (u_n) la suite de

$h_n(x) = u_n\big(h^2(x)\big)$ pour tout $x \in X$. Comme u_n e B une algèbre contenant le $h_n \in B$. Par le lemme,

$$\| |h| - h_n \|_\infty = \sup_{x \in X} \big| |h(x)| - u_n\big(h^2(x)\big) \big| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |\sqrt{t} - u_n(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Chaque u_n étant un polynôme et h^2 appartenant à B, on a $h_n \in B$ pour tout n, donc par l'hy $|h| \in B$. □

Lemme 2.1.3. *Si $A \subset C_b(X)$ e*

$B = \bar{A}$ e

Démonstration. Il e B e

$C_b(X)$. Soient $f, g \in B$. Il existent de (f_n), (g_n) dans A qui convergent (en norme uniforme) vers f et g re

ticulier, $\sup_n \left(\|f_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty\right) = C < \infty$. On a alors $\|f\|_\infty \leqslant C$, et pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (f_n g_n)(x)| &\leqslant |f(x)\big(g(x) - g_n(x)\big)| + |\big(f(x) - f_n(x)\big) g_n(x)| \\ &\leqslant C\big(\|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty\big) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Il en suit que $fg \in B$ et c'e □

Théorème 2.1.4 (Stone-Weierstrass, cas réel)**.** *Soit K un compact et $A \subset C(K, \mathbb{R})$ une sous-algèbre qui*

* *sé K et*
* *contient le*

Alors A e $C(K, \mathbb{R})$.

Démonstration. On po $B = \bar{A}$, c'e $C(K, \mathbb{R})$. On va montrer que $B = C(K, \mathbb{R})$. Soit $f \in C(K, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On cherchera à approcher f par de $B \supset A$.

Pour tous $a, b \in K$ il existe $h_{ab} \in A$ telle que $h(a) \neq h_{ab}(b)$. On peut po

$$g_{ab} = f(a) + \big(f(b) - f(a)\big) \frac{h_{ab} - h_{ab}(a)}{h_{ab}(b) - h_{ab}(a)}$$

et obtenir $g_{ab}(a) = f(a)$, $g_{ab}(b) = f(b)$, tout en ayant $g_{ab} \in A$ (c'e combinaison linéaire de h_{ab} et 1). Le

$$U_{ab} = \{x \in K : g_{ab}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \quad V_{ab} = \{x \in K : g_{ab}(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

contiennent alors chacun le a et b.

Pour b fixé, le $\{U_{ab} : a \in K\}$ sont un recouvrement ouvert de K, dont on peut choisir un sous-recouvrement fini $\{U_{a_k b}\}_{k=1,\dots,n}$. La fonction

$$g_b = \min\{g_{a_1 b}, \dots, g_{a_n b}\}$$

e B par Lemme 2.1.2, et pour tout $x \in K$ on trouve k tel que $x \in U_{a_k b}$ donc

$$g_b(x) \leqslant g_{a_k b}(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Soit $V_b = \cap_{k=1}^{n} V_{a_k b}$. Pour $x \in V_b$ on a $g_{a_k b}(x) > f(x) - \varepsilon$ pour tout k, donc $g_b(x) > f(x) - \varepsilon$.

Le $\{V_b : b \in K\}$ sont un recouvrement ouvert de K, on en choisit alors un sous-recouvrement fini $V_{b_1}, \dots, V_{b_m}$ et on po

$$g = \max\{g_{b_1}, \dots, g_{b_m}\}.$$

Par Lemme 2.1.2, $g \in B$.

Pour tout $x \in K$, il existe k tel que $x \in V_{b_k}$, alors $g(x) \geqslant g_{b_k}(x) > f(x) - \varepsilon$. Au même temps, on avait $g_b < f + \varepsilon$ pour tout b, donc $g < f + \varepsilon$. Nous avons trouvé alors $g \in B$ telle que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

On peut conclure que $f \in B$ et alors $B = C(K, \mathbb{R})$, donc A e dense. □

Corollaire 2.1.5 (Stone-Weierstrass, cas complexe). *Soit K compact et $A \subset C(K, \mathbb{C})$ une sous-algèbre qui*

- *contient le*
- *sé*
- *e* $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$.

Alors A e $C(K)$.

Démonstration. Soit $A_R = \{\Re f : f \in A\}$; c'e

e $C(K, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in A$, on a $\Re f = (f + \bar{f})/2$, donc en réalité $A_R \subset A$, et il en suit que c'e

réelle A_R. Enfin, pour $x \neq y$ soit $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Si $\Re f(x) = \Re f(y)$, alors forcément $\Im f(x) \neq \Im f(y)$, et la fonction $g = if \in A$ aura la pro $\Re g(x) = -\Im f(x) \neq -\Im f(y) = \Re g(y)$. L'algèbre A_R sé K, et par le cas réel tu théorème elle e $C(K, \mathbb{R})$.

Toute fonction $f \in C(K, \mathbb{R})$ se décompo $f = \Re f + i\Im f$ avec $\Re f$, $\Im f$ dans $\bar{A}_R \subset \bar{A}$; cette adhérence étant un e $f \in \bar{A}$. □

Corollaire 2.1.6. L'e $C([a, b])$ *pour tout* $a < b$.

Démonstration. L'assertion e et réel. Il e le

Enfin, le conjugué d'un polynôme aux coefficient d'une variable

(Ce n'e nôme $\mathbb{C}$ e holomorphe □

Exemple 2.1.7. Soit $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ *et* A *la sous-algèbre de polynôme* $C(\bar{\mathbb{D}})$:

$$A = \{z \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k z^k,\ \ n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}\}.$$

Alors A *contient le dans* $C(\bar{\mathbb{D}})$. *On peut le voir de la façon suivante : pour* $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$, *on po*

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it} e^{it} dt;$$

c'e $C(\bar{\mathbb{D}})$, *en particulier,* $|I(f)| \leqslant \|f\|_\infty$. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$I(z^k) = \int_0^{2\pi} e^{it(k+1)} dt = 0,$$

donc $I \equiv 0$ *sur* A *et par continuité sur son adhérence. Mais pour la fonction* $f(z) = \bar{z}$ *on a*

$$I(f) = \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi \neq 0,$$

donc $f \notin \bar{A}$.

Remarque 2.1.8. *Il existe une version de ce théorème pour ce cas où* A *e* $C_0(X)$ *sur un e* *compact* X. *Un cas important de ce théorème e* $C_0(\mathbb{R})$ *de l'image de la transformée de Fourier de* $L_1(\mathbb{R})$ *(cours d'analy Fourier du seme*

(fin du cours 8)

2.2 Équicontinuité ; théorème d'Arzelà-A

2.2.1 Fonctions équicontinue

Cette notion e

Définition 2.2.1. *Soit* $F \subset C(X)$ *une famille de fonctions sur un e* (X, d). *Elle e* *tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \forall f \in F \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si $F = \{f\}$ *ne contient qu'une fonction* f, *il e* *continu ssi* f *e*

D'une façon similaire, on dit qu'une famille F *de fonctions de* X *dans* $\mathbb{R}^n$ *e* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $d(x, y) < \delta$ *implique* $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. *(La pro dé* $\mathbb{R}^n$.*)*

Remarque 2.2.2.
- ⋆ *On obtient la même classe de fonctions en demandant l'inégalité non-stricte* $d(x, y) \leqslant \delta$ *(passer à* $\delta/2$*).*
- ⋆ *On remarque que toute fonction dans une famille uniformément équicontinue e*
- ⋆ *On peut définir de la même façon l'équicontinuité de fonctions de* X *dans un autre e* (Y, ρ) *: l'inégalité* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *se remplace par* $\rho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.
- ⋆ *Il e* δ *soit le même pour toute* $f \in F$.
- ⋆ *On peut définir l'équicontinuité dans un point* x, *on va l'évoquer plus tard.*

La négation s'écrit en inversant le une famille $F \subset C(X)$ *n'e*

$\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existent $x, y \in X$ vérifiant $d(x,y) < \delta$ mais tel

$$\exists f \in F : \ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Exemple 2.2.3. La famille $F = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $f_n(t) = t^n$ n'e pas uniformément équicontinue sur $[0,1]$. On peut po $\varepsilon = 1/2$, alors pour tout $\delta > 0$ (qu'on peut suppo $x = 1$, $y = 1 - \delta$ en obtenant : $|x - y| = \delta$, mais

$$|f_n(x) - f_n(y)| = 1 - (1-\delta)^n \to 1, \quad n \to \infty.$$

Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f_n(y)| > 1/2 = \varepsilon$.

On va citer deux conditions suffisante

Pro 2.2.4. *Si toute $f \in F$ sont lipschitzienne avec la même constante $C > 0$, alors F e*

Démonstration. (On suppo
$\mathbb{R}^n$.) Si $d(x,y) < \delta$, on a alors pour toute $f \in F$

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant C d(x,y) < C\delta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon / C$ (ou quelconque si $C = 0$). □

Pro 2.2.5. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte convexe, et F une famille de fonctions de classe C^1 de X dans $\mathbb{R}^m$. Suppo existe $C > 0$ tel que*

$$\sup_{x\in X} \|df(x)\| \leqslant C$$

pour toute $f \in F$. Alors F e

En particulier, si $X = [a,b]$, on suppo

$$\forall f \in F \quad \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leqslant C.$$

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème d'accroissement $x, y \in X$. On paramètre le segment $[x,y]$: on définit une fonction $\gamma : [0,1] \to X$ par $\gamma(t) = ty + (1-t)x$. Pour toute $f \in F$, la compo $f \circ \gamma$ e $(f\circ\gamma)'(t) = df\big(\gamma(t)\big)[\gamma'(t)] = df\big(\gamma(t)\big)[y - x]$, alors

$$f(y) - f(x) = f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) = \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)dt;$$

en chaque coordonnée, c'e
On peut ensuite majorer l'intégrale :

$$\|f(y)-f(x)\| \leqslant \int_0^1 \|df(\gamma(t))\| \, \|y-x\| dt \leqslant C\|x-y\|.$$

Le $f \in F$ sont alors lipschitzienne C, et on conclut par la pro □

Exemple 2.2.6. 1. *La fonction $f(t)=t$ e nue sur $\mathbb{R}$: on po $\delta=\varepsilon$.*

2. *La fonction $f(t)=t^2$ n'e $\mathbb{R}$: pour $\delta>0$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a*

$$f(x+\delta)-f(x)=(x+\delta)^2-x^2>2\delta x \to +\infty, \quad x\to+\infty,$$

on ne peut donc pas le majorer par aucun $\varepsilon>0$.

La définition suivante e on permet à $\delta>0$ de dé x, mais toujours pas de f.

Définition 2.2.7. *Soit $F\subset C(X,\mathbb{R}^n)$ une famille de fonctions sur un e (X,d). Elle e $\varepsilon>0$ et tout $x\in X$ il existe $\delta>0$ tel que pour tout $y\in X$*

$$d(x,y)<\delta \ \Rightarrow \forall f\in F \ \ \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon.$$

Pour une seule fonction, le théorème suivant e de

Théorème 2.2.8. *Si l'e K e famille $F\subset C(K,\mathbb{R}^n)$ équicontinue e*

Démonstration. Suppo $F\subset C(K,\mathbb{R}^n)$ équicontinue mais non uniformément équicontinue. Il existe alors $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\delta>0$ on peut trouver de $x,y\in K$ à distance inférieur à δ et $f\in F$ tel $\|f(x)-f(y)\|>\varepsilon$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, po $\delta_n=2^{-n}$, et soient x_n, y_n, f_n tel $\|f_n(x_n)-f_n(y_n)\|>\varepsilon$ mais $d(x_n,y_n)<\delta_n$.

Par compacité, on peut choisir une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un point $x\in K$. Comme $d(x_n,y_n)\to 0$, on a aussi $y_{n_k}\to x$, $k\to\infty$. La famille F e x, alors pour le même $\varepsilon>0$

il existe $\delta > 0$ tel que $d(x,y) < \delta$ implique $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/3$ pour tout $f \in F$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(x,\delta)$ si $k \geqslant N$. On a alors pour ce k

$$\|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})\| \leqslant \|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)\| + \|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y_{n_k})\| < 2\varepsilon/3,$$

ce qui contredit le choix de f_n ; cette contradiction démontre le théorème. □

Sur le

forme ou non.

L'équicontinuité a de

Théorème 2.2.9. Soit (K,d) un e (f_n) *une suite équicontinue de fonctions convergente simplement vers $f \in C(X)$. Alors la convergence e*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ et suppo $\delta > 0$ corre ε par l'équicontinuité. Pour tout $x \in K$ et $y \in B(x,\delta)$ on a alors

$$\|f(x) - f(y)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Par la convergence simple, pour tout $x \in K$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_x$ implique $\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$. Le recouvrement ouvert $\{B(x,\delta) : x \in K\}$ de K admet un sous-recouvrement fini $\{B(x_k,\delta) : k = 1,\ldots,m\}$. On po $N = \max\{n_{x_k} : k = 1,\ldots,m\}$. Pour tout $x \in K$ on trouve alors k tel que $x \in B(x_k,\delta)$, et pour $n \geqslant N$ on a

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \|f(x) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - f_n(x)\| < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre la convergence uniforme. □

2.2.2 Théorème d'Arzelà-A

Le lemme suivant e

Lemme 2.2.10. Tout e

à-dire il contient une partie dénombrable dense).

Démonstration. Suppo (K,d) e n, po $\varepsilon_n = 2^{-n}$; le compact K admet un ε_n-ré R_n. Soit $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} R_n$. C'e K. De plus, pour tout

$x \in K$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n} < \varepsilon$, et on peut trouver $r \in R_n$ tel que $x \in B(r, \varepsilon_n) \subset B(r, \varepsilon)$. L'ensemble D e
K. □

——— (fin du cours 9) ———

Remarque 2.2.11. Cette assertion n'e
néral d'un compact to $[0,1]^{\mathbb{N}}$ et (étonnamment) $[0,1]^{\mathbb{R}}$ sont sé $[0,1]^{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ ne l'e

Lemme 2.2.12. *Soit (X,d) un e (f_n) une suite uniformément équicontinue de fonctions de X dans $\mathbb{R}^m$, convergente simplement sur une partie dense $D \subset X$. Alors la suite converge simplement sur X tout entier vers une fonction continue.*

(Si X e

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ $d(x,y) < \delta$ implique $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ pour tout n.

Soit $x \in K$. Il existe $r \in D$ tel que $d(x,r) < \delta$. Par l'hy existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$ on a $\|f_n(r) - f_m(r)\| < \varepsilon$. Il en suit alors

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \|f_n(x) - f_n(r)\| + \|f_n(r) - f_m(r)\| + \|f_m(r) - f_m(x)\| < 3\varepsilon.$$

On conclut que $(f_n(x))$ e
vers une limite qu'on peut noter $f(x)$.

Soit $\delta > 0$ choisi par l'équicontinuité par rapport à $\varepsilon > 0$. Pour tout $x, y \in K$ on a

$$\|f(x) - f(y)\| = \lim_{n \to \infty} \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \varepsilon,$$

donc f e □

Théorème 2.2.13 (Arzelà-A . *Soit K un e pact. Une famille $F \subset C(K, \mathbb{R}^m)$ e ment si*

- $\star$ *F e* $\sup\{\|f\|_\infty : f \in F\} < \infty$;
- $\star$ *F e*

Démonstration. (⇒) Suppo $F \subset C(K)$ e
pact, c'e $\bar{F}$ e
tion continue sur $C(K)$, elle e $\bar{F}$ et F e
mément bornée.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\varepsilon/3$-ré $\{f_1, \ldots, f_m\}$ dans F. Toute fonction continue e $\delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, tel $d(x,y) < \delta_k$ implique $\|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon/3$. Po $\delta = \min\{\delta_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$. Soient maintenant $x, y \in K$ avec $d(x,y) < \delta$ et $f \in F$. On choisit $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon/3$, et alors

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(y)\| + \|f_k(y) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Cela montre que F e

$\Leftarrow$ On va montrer que toute suite (f_n) dans F admet une sous-suite convergente (en norme uniforme). Toute la complexité e dans la convergence simple.

Soit $D \subset K$ une partie dense dénombrable, $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ou bien $D = \{d_n : n \leqslant N\}$ si D e $t \in D$, l'ensemble $\{f_n(t) : f \in F\}$ e $\mathbb{R}^m$ par l'hy $\|f(t)\| \leqslant C$ pour toute $f \in F$), on peut donc en choisir une suite convergente. On commence par en choisir une telle que $f_{n_k}(d_0)$ converge ; on note $f_{0,k} = f_{n_k}$. On procède ensuite par récurrence : de chaque suite $f_{m,n}$ on choisit une sous-suite $f_{m+1,k} = f_{m,n_k}$ telle que $f_{m+1,k}(d_{m+1})$ converge. A chaque étape, on garde la convergence en d_j pour $j \leqslant m$ car $f_{m+1,k}$ e $f_{j,n}$, $j \leqslant m$.

Si D e $K = D$ e sur $m + 1 = N$ et la suite $f_{N,k}$ e $d \in D$, donc convergente sur K.

Sinon on choisit une suite «diagonale» $g_n = f_{n,n}$. Pour chaque m, cela devient une sous-suite de $f_{m,n}$ à partir de $n = m$, la suite $(g_n(d_m))$ e m. Par Lemme 2.2.12, (g_n) converge simplement sur K vers une fonction continue g. Par Pro 2.2.9, la convergence e

(fin du cours 10)

Il en suit que $\bar{F}$ e (f_n) e $\bar{F}$, on peut choisir pout tout $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction $g_n \in F$ telle que $\|f_n - g_n\|_\infty < 1/n$; par ce qui précède, il existe une sous-suite (g_{n_k}) convergente, vers une limite g, et on aura alors $\|g - f_{n_k}\|_\infty \leqslant \|g - g_{n_k}\|_\infty + \|g_{n_k} - f_{n_k}\|_\infty \to 0$, $k \to \infty$. □

L'application sans doute la plus importante e suite.

Théorème 2.2.14 (Péano). *Soit U un ouvert borné dans $\mathbb{R}^{m+1}$, et soit $f : \bar{U} \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in U$ l'équation différentielle*

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

admet une solution y sur un segment $[x_0, x_0 + h]$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. On commence par délimiter le voisinage de x_0 où sera définie la fonction y. Toute $\mathbb{R}^{m+1}$, on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$ et la distance associée. Il existe $r > 0$ tel que $K = \overline{B\big((x_0, y_0), r\big)}$ e U. Notons $M = \sup_{(x,y)\in K} \|f(x, y)\|$. Si $M = 0$ il n'y a rien à démontrer, on po $y \equiv y_0$. On peut suppo alors $M > 0$ et on po $h = r/\max(M, 1)$ et $I = [x_0, x_0 + h]$.

On définit ensuite de u_n, $n \in \mathbb{N}$, de I dans $\mathbb{R}^m$. Pour $n = 0$, on po $u_0 \equiv y_0$. Pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in I$, on procède par récurrence (en k, avec n fixe) sur de $u_n \equiv y_0$ sur $[x_0, x_0 + \frac{h}{n}]$, et si u_n e $[x_0 + \frac{(k-1)h}{n}, x_0 + \frac{kh}{n}]$, $k \geqslant 1$, on po $x \in]x_0 + \frac{kh}{n}, x_0 + \frac{(k+1)h}{n}] \cap I$

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-h/n} f\big(t, u_n(t)\big)dt. \tag{2.2}$$

La partie droite e $\big(t, u_n(t)\big) \in U$ pour tout t. C'e évident pour $n = 0$ et pour $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{n}]$. Pour $n \geqslant 1$ ont procède par récurrence : si $\big(t, u_n(t)\big) \in U$ pour $t \in [x_0, x_0 + \frac{kh}{n}]$, alors $u_n(x)$ e bien défini pour $x \in]x_0 + \frac{kh}{n}, x_0 + \frac{(k+1)h}{n}] \cap I$, et on a

$$\|u_n(x) - y_0\| \leqslant \int_{x_0}^{x-h/n} \|f\big(t, u_n(t)\big)\|dt \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant r.$$

Comme $|x - x_0| \leqslant h \leqslant r$, on a donc $(x, u_n(x)) \in K$. On peut donc définir u_n sur I.

Le (u_n) sont lipschitzienne $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$, alors le

- $\star$ $x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + \frac{h}{n}]$, alors $u(x_1) - u(x_2) = 0$;
- $\star$ $x_1 \in [x_0, x_0 + \frac{h}{n}]$ mais $x_2 > x_0 + \frac{h}{n}$ (ou le cas symétrique), alors

$$\|u_n(x_2) - u_n(x_1)\| = \Big\| \int_{x_0}^{x_2-h/n} f\big(t, u_n(t)\big)dt \Big\| \leqslant M\Big|x_2 - \frac{h}{n} - x_0\Big| \leqslant M|x_2 - x_1|;$$

- $\star$ $x_1 > x_0 + \frac{h}{n}$ auquel cas

$$\|u_n(x_1) - u_n(x_2)\| = \Big\| \int_{x_1-h/n}^{x_2-h/n} f\big(t, u_n(t)\big)dt \Big\| \leqslant M|x_1 - x_2|.$$

Le (u_n) sont donc équicontinue
uniformément :

$$\|u_n(x)\| \leqslant \|y_0\| + \|u_n(x) - y_0\| \leqslant \|y_0\| + M|x - x_0| \leqslant \|y_0\| + Mh = \|y_0\| + r.$$

L'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $C(I, \mathbb{R}^m)$
par le théorème d'Arzelà-A (u_{n_k})
convergente uniformément vers une fonction continue y.

En passant à la limite (par sous-suite) dans (2.2), – et pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$ on peut appliquer cette formule à partir de certain n – on obtient $y(x)$ à gauche, et

$$y_0 + \lim_{k\to\infty} \Big[\int_{x_0}^{x} f\big(t, u_{n_k}(t)\big)dt - \int_{x-h/n_k}^{x} f\big(t, u_{n_k}(t)\big)dt \Big]$$

à droite. La deuxième intégrale e $M\frac{h}{n_k}$ et tend vers 0. Dans la première, le $t \mapsto f\big(t, u_{n_k}(t)\big)$ convergent simplement vers $t \mapsto f\big(t, y(t)\big)$ et sont majorée M, donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour conclure que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt.$$

La fonction y e

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big),$$

c'e □

Avec de
sur un segment $[x_0 - h, x_0 + h]$ dont x_0 e
u_n e $[x_0 - \frac{kh}{n}, x_0 - \frac{(k-1)h}{n}]$, $k \geqslant 0$, on po $x \in [x_0 - \frac{(k+1)h}{n}, x_0 - \frac{kh}{n}] \cap I$

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x+h/n} f\big(t, u_n(t)\big)dt \tag{2.3}$$

(à noter, $x_0 > x + \frac{h}{n}$ si $x < x_0 - \frac{h}{n}$), en montrant par récurrence que l'intégrale e

Chapitre 3

O

3.1 Théorème de Baire

Ce théorème a de nombreuse
férent

Théorème 3.1.1. *Soit E un e* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$
où tout F_n e $N \in \mathbb{N}$ *tel que F_N contient une boule ouverte (autrement dit, F_N a l'intérieur non-vide).*

Démonstration. Suppo F_n e
n. En particulier, $F_0 \neq E$, on peut donc choisir $x_0 \in E \setminus F_0$. Comme F_0
e $\varepsilon_0' > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon_0') \subset E \setminus F_0$. En po $\varepsilon_0 = \varepsilon_0'/2$,
on obtient l'inclusion pour la boule fermée : $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset E \setminus F_0$.

L'intérieur de F_1 e $x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0) \setminus F_1$. Il e
aussi fermé, il existe donc $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset E \setminus F_1$. On peut choisir ε_1 assez petit pour que $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset B(x_0, \varepsilon_0)$, et aussi $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$.

On continue par récurrence : pour tout n, la boule $B(x_n, \varepsilon_n)$ n'e
pas contenue dans F_{n+1}, on peut donc choisir $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n) \setminus F_{n+1}$ et ensuite $\varepsilon_{n+1} > 0$ tel que $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n, \varepsilon_n) \setminus F_{n+1}$ et $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2$.

Par construction, $m > n$ implique $x_m \in B(x_n, \varepsilon_n)$, donc

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon_n < \varepsilon_0/2^n. \tag{3.1}$$

La suite (x_n) e E e
vers une limite $x \in E$. En passant à la limite en $m \to \infty$ dans (3.1), on obtient $d(x_n, x) \leqslant \varepsilon_n$. On a donc

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus F_n) = E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Mais le dernier ensemble e

démontre le théorème. □

Remarque 3.1.2. Il e E complet :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}^*}} \{\frac{m}{n}\}$$

e

vide. On voit aussi sur cet exemple qu'il n'existe aucune distance complète sur $\mathbb{Q}$.

——————— (fin du cours 11) ———————

On donne la première application :

Théorème 3.1.3 (sera fait en TD). Aucun e
dimension infinie n'admet de base (algébrique) dénombrable.

Démonstration. Suppo $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e
Banach E de dimension infinie. Le F_n engendré $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sont de dimension finie, donc complet
norme et en particulier dans la norme de E. Il en suit qu'il
fermé E. Par l'hy $E = \cup_n F_n$; par le théorème de Baire, il existe N tel que F_N contient une boule ouverte $B(x, \varepsilon)$. La boule fermée $\overline{B}(x, \varepsilon)$ e F_N et bornée, elle e
(dans la to E). Or E e
sion infinie et se
démontre le théorème. □

A noter, le
la décompo

On peut reformuler le théorème de Baire en passant aux ouvert

Théorème 3.1.4. Soit E un e
$G_n \subset E$ e $n \in \mathbb{N}$, alors $G = \cap G_n$ e
dans E.

Démonstration. L'assomption que G_n e
que $E \setminus G_n$ a l'intérieur vide : tout ouvert $U \subset E$ intersecte G_n donc
n'e $E \setminus G_n$. Par le théorème de Baire, on peut
obtenir facilement que G e $E = \cup_n (E \setminus G_n)$ serait

la réunion d'ensemble
aussi la densité de G.

Soit $x \in E$ quelconque et $\varepsilon > 0$. La boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ rencontre G_0, il existe alors $x_0 \in B(x, \varepsilon) \cap G_0$. On peut choisir $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset G_0 \cap B(x, \varepsilon)$.

On continue par récurrence : pour tout n, il existe $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n) \cap G_{n+1}$, et ensuite $\varepsilon_{n+1} \in]0, \varepsilon_n/2[$ tel que $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset G_{n+1} \cap B(x_n, \varepsilon_n)$. Par construction, $d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon_n < \varepsilon/2^n$ si $m > n$, donc la suite (x_n) e
de Cauchy dans un e E ; elle converge vers une limite y. Pour tout n, on a $d(y, x_n) \leqslant \varepsilon_n$, donc

$$y \in \bigcap_n \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset \bigcap_n G_n = G.$$

Nous avons montré que toute boule ouverte dans E rencontre G, il
e □

Nous pouvons donner une autre application :

Pro 3.1.5. Soit $a < b$. Il existe de
$[a, b]$ qui ne sont monotone
à-dire à l'intérieur non-vide). De plus, l'ensemble de telle
e $C[a, b]$ en norme uniforme.

Démonstration. L'ensemble de $[a, b]$ à borne
nelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de cet ensemble.

$$G_n = \{f \in C[a, b] : f \text{ n'e} \qquad I_n\}.$$

Montrons que cet ensemble e $f \in G_n$, il existent $x, y, s, t \in I_n$ tel $x < y$, $u < v$, $f(x) < f(y)$ et $f(u) > f(v)$. Soit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{f(y) - f(x), f(u) - f(v)\}.$$

Si $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, alors

$$g(y) = g(y) - f(y) + f(y) > f(y) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} > g(x),$$

et de même $g(u) > g(v)$. La fonction g n'e
I_n et $g \in G_n$.

Montrons maintenant que G_n e $C[a, b]$. Soit $f \in C[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $x \in I_n$ quelconque et $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| <$

$\varepsilon/4$ pour tout $y \in J_\delta = [x-\delta, x+\delta]$; on peut aussi assurer que $J_\delta \subset I_n$. On construit une fonction $g \in C[a,b]$ qui sera égale à f sur $[a,b] \setminus J_\delta$ et en x, affine par morceaux sur J_δ et telle que $g(x-\delta/2) = f(x) - \varepsilon/2$, $g(x+\delta/2) = f(x) + \varepsilon/2$. Pour tout $y \in J_\delta$ on a alors

$$f(y) - g(y) < f(x) + \frac{\varepsilon}{4} - \bigl(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\bigr) < \frac{3\varepsilon}{4}$$

et de même $f(y) - g(y) > -3\varepsilon/4$. Il en suit donc $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$, et par construction $g \in G_n$.

On peut appliquer le théorème de Baire : $G = \cap G_n$ e

$C[a,b]$. Une fonction $f \in G$ n'e I_n ; mais tout sous-intervalle (à l'intérieur non-vide) de $[a,b]$ contient l'un de tervalle I_n, donc f n'e

vial. □

(fin du cours 12)

3.2 Trois théorème

No $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si le corps

n'e

A rappeler : une application linéaire entre de

continue ssi elle e

d'un o A e

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

On notera $B(E,F)$ l'e E dans F, et $B(E) = B(E,E)$.

3.2.1 Théorème de l'application ouverte

Rappelons qu'une application continue bijective ouverte e

méomorphisme ; être ouverte e

continue.

Pour le

en zéro, tout comme la continuité :

Pro 3.2.1. *Soit* E, F *de* $A : E \to F$ *une application linéaire bornée. Alors* A *e* si l'image de la boule unité de E contient une boule $B_F(0,\varepsilon)$ de F, de rayon $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Notons par U la boule unité de E. Si A e
alors l'image $A(U)$ e $0 = A0$ et donc une boule ouverte autour $B_F(0,\varepsilon)$.

Reciproquement, suppo $\varepsilon > 0$ tel que $B_F(0,\varepsilon) \subset A(U)$. Soit $V \subset E$ un ouvert et $x \in V$. On choisit $r > 0$ tel que $B_E(x,r) \subset V$. Alors

$$
\begin{aligned}
A(V) \supset A\bigl(B_E(x,r)\bigr) &= A\bigl(x + B_E(0,r)\bigr) \\
&= Ax + rA\bigl(B_E(0,1)\bigr) \supset Ax + rB_F(0,\varepsilon) = B_F(Ax, r\varepsilon),
\end{aligned}
$$

donc $A(V)$ e □

Théorème 3.2.2 (Banach, de l'application ouverte). *Soit E, F de e $A : E \to F$ une application linéaire bornée. Si A e*

Démonstration. (1) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$D_N = \{y \in F : \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } y = Ax \text{ et } \|x\| \leqslant N\|y\|\}.$$

Par l'hy

$$F = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} D_N.$$

Par le théorème de Baire, l'adhérence d'au moins l'un de se a l'intérieur non-vide, par exemple $\overline{D_{N_0}}$; il existe $y_0 \in F$, $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon_0) \subset \overline{D_{N_0}}$.

(2) L'ensemble D_{N_0} e $y = Ax$ avec $\|x\| \leqslant N_0\|y\|$, alors $-y = A(-x)$ avec le $B(-y_0, \varepsilon_0)$ e contenu dans $\overline{D_{N_0}}$ aussi.

$\overline{D_{N_0}}$ n'e
contient une boule centrée en 0. Mais on peut montrer qu'il contient une boule privée d'une autre, plus petite. Fixons $\delta \in]0, \varepsilon_0/2[$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2N_0(\|y_0\| + \varepsilon_0)/\delta$. Nous po $B = B(0,\varepsilon_0) \setminus \overline{B}(0,\delta)$ et montrerons que D_N e B.

Soit $z \in B$ et $h > 0$. On suppo $h < \|z\| - \delta$. On peut écrire $z = (y_0 + z) - y_0$, avec $y_0 + z \in B(y_0, \varepsilon_0)$. Par la densité obtenue précèdemment, il existent $z_1 \in B(y_0, \varepsilon_0) \cap D_{N_0}$, $z_2 \in B(-y_0, \varepsilon_0) \cap D_{N_0}$ tel $\|z_1 - (y_0 + z)\| < h/2$ et $\|z_2 - (-y_0)\| < h/2$. On po $z_3 = z_1 - z_2$ et on voit que

$$\|z - z_3\| = \|z + y_0 - y_0 - z_1 - z_2\| \leqslant \|(z + y_0) - z_1\| + \|(-y_0) - z_2\| < 2 \cdot \frac{h}{2} = h.$$

On peut aussi minorer

$$\|z_3\| = \|z - (z - z_3)\| \geqslant \|z\| - \|z - z_3\| > \|z\| - h > \delta.$$

On montrera ensuite que $z_3 \in D_N$. Il existent $x_1, x_2 \in E$ tel $z_1 = Ax_1$, $z_2 = Ax_2$ et $\|x_j\| \leqslant N_0\|z_j\|$, $j = 1, 2$. On a alors $z_3 = A(x_1 - x_2)$ avec

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leqslant \|x_1\| + \|x_2\| \leqslant N_0(\|z_1\| + \|z_2\|) \leqslant 2N_0(\|y_0\| + \varepsilon_0) \\ &= 2N_0(\|y_0\| + \varepsilon_0) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \delta = N\delta < N\|z_3\|, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $z_3 \in D_N$.

3 Montrons qu'en fait, D_N e F. Soit $y \in F$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\delta < \|\lambda y\| < \varepsilon_0$, c'e $\lambda y \in B$. Comme D_N e B, il existe une suite (z_n) dans D_N convergente vers λy. La suite (z_n/λ) converge vers y. Mais z_n/λ e D_N aussi pour tout n : si $z_n = Ax_n$ avec $\|x_n\| \leqslant N\|z_n\|$, alors $z_n/\lambda = A(x_n/\lambda)$ et $\|x_n/\lambda\| \leqslant N\|z_n/\lambda\|$. Cela montre que $y \in \overline{D_N}$.

4 Soit $y \in F$ quelconque, non-nul. En utilisant la densité de D_N, nous construirons une certaine série convergente vers y.

Il existe $y_0 \in D_N$ tel que $\|y - y_0\| < \|y\|$. Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$ on choisit $y_n \in D_N$ tel que

$$\|(y - y_0 - \cdots - y_{n-1}) - y_n\| < \|y\|/2^n.$$

Cette inégalité garantit que y e $\sum y_n$.
Le y_n sont majorée

$$\|y_n\| = \|\big(y - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\big) - \big(y - \sum_{k=0}^{n} y_k\big)\| \leqslant \|y\|\big(2^{-(n-1)} + 2^{-n}\big) < \|y\|\, 2^{2-n}.$$

Pour chaque n, il existe $x_n \in E$ tel que $Ax_n = y_n$ et $\|x_n\| \leqslant N\|y_n\| < N\, 2^{2-n}$. La série $\sum x_n$ e E, vers une somme x. On a aussi

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \leqslant N \sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\| \leqslant N \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|\, 2^{2-n} = 8N\|y\|.$$

Donc $y \in D_{8N}$, et comme $0 \in D_n$ pour tout n, on conclut que $D_{8N} = F$.

5 Pour tout $y \in F$ il existe alors $x \in E$ tel que $Ax = y$ et $\|x\| \leqslant 8N\|y\|$. En particulier, si $\|y\| < \frac{1}{8N}$, on peut trouver x avec $\|x\| < 1$. L'image de la boule unité $B(1,0)$ de E contient donc la boule $B(0, \frac{1}{8N})$ de F. □

——— (fin du cours 13) ———

Si A e

Théorème 3.2.3 (Banach, de l'o . Soit E, F de pace $A : E \to F$ *une application linéaire bornée. Si* A e

On retrouve alors une situation similaire à celle de dimension finie : dans l'e $B(E,F)$, inversible = bijectif. Il e
tous le

Exemple 3.2.4. *Toute*

1. F *non complet : Soit* $E = C[a,b]$ *avec la norme uniforme (de Banach) et* $F = C[a,b]$ *avec la norme* $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$. *L'application identité e* $\|f\|_2 \leqslant (b-a)^{1/2}\|f\|_\infty$.
Mais ce
que F *n'e*
2. E *non complet : soit* F *un e* φ *une fonctionnelle linéaire discontinue sur* F. *On po* $E = F$ *avec la norme* $\|x\|_E = \|x\|_F + |\varphi(x)|$. *L'application identité de* E *dans* F
e
équivalente
3. A *non surjectif : l'inclusion de* $E = C[a,b]$ *dans* $F = L^2[a,b]$ *e continue mais non ouverte.*

3.2.2 Théorème du graphe fermé

Définition 3.2.5. *Soit* E, F *de* $A : E \to F$ *une application. Le graphe de* A *e*

$$\Gamma_A = \{(x,y) \in E \times F : Ax = y\}.$$

L'ensemble $A \times B$ e $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$. Si E, F sont normé

$E \times F$ e $\|(x,y)\|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p}$, $p \in$
$[1,+\infty[$ et avec $\|(x,y)\|_\infty = \max\big(\|x\|, \|y\|\big)$. Ce
Si E et F sont complet $E \times F$ l'e

Pro 3.2.6. *Le graphe d'une application linéaire $A : E \to F$*
e $E \times F$.

Démonstration. Si $(x_j, y_j) \in \Gamma_A$, c'e $Ax_j = y_j$, $j = 1, 2$, alors $A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$, donc $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \Gamma_A$. De même, pour tout λ on a $(\lambda x_1, \lambda y_1) \in \Gamma_A$. □

Théorème 3.2.7 (Banach, du graphe fermé). *Soit E, F de Banach et $A : E \to F$ une application linéaire. Alors A e si et seulement si Γ_A e* $E \times F$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Suppo A e $(x_n, y_n) \in \Gamma_A$ tel $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$. Alors $Ax_n = y_n$ pour tout n, et par continuité $Ax = y$, donc $(x, y) \in \Gamma_A$.

$\Leftarrow$ Par l'hy Γ_A e
$E \times F$. C'e

Sur $E \times F$, la pro $P : (x, y) \mapsto x$ sur E e
re Γ_A e
par $P : (x, Ax) \mapsto x$ et donc elle e
l'o $P|_{\Gamma_A}$ e
e $x \mapsto (x, Ax)$, donc il existe $C > 0$ tel que $\|(x, Ax)\| \leqslant C\|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui implique que A e □

Exemple 3.2.8. *Soit T un o* $L^2[a,b]$ *tel que $T(C[a,b]) \subset C[a,b]$. Alors la re* T *sur $C[a,b]$ e en norme uniforme.*

Démonstration. Soit $\Gamma \subset C[a,b]^2$ le graphe de la re T. Suppo $(f_n, g_n) \in \Gamma$ et $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $C[a,b]$. Comme $\|f_n - f\|_2 \leqslant (b-a)^{1/2}\|f_n - f\|_\infty$, nous avons aussi $f_n \to f$ dans $L^2[a,b]$, et par la continuité de T donc $g_n = Tf_n \to Tf$ en $\|\cdot\|_2$. Au même temps, $\|g_n - g\|_2 \leqslant (b-a)^{1/2}\|g_n - g\|_\infty \to 0$. Le g et Tf sont donc égale $L^2[a,b]$ donc égale
continue $g = Tf$ et $(f, g) \in \Gamma$,
autrement dit, Γ e $T|_{C[a,b]}$
e □

3.2.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 3.2.9. *Soient E, F de* $T_i : E \to F$, $i \in I$, *une famille d'o* $x \in E$

$$C_x = \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty.$$

Alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Démonstration. Soit $B = \{x \in E : \ \forall i \in I \ \ \|T_i x\| \leqslant 1\}$. C'e
de fermé $x \in E$. Si $N \in \mathbb{N}$ e $N > C_x$,
alors par l'hy $i \in I$

$$\|T_i(\frac{x}{N})\| \leqslant \frac{C_x}{N} < 1,$$

donc $x/N \in B$. Cela implique que $E = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} NB$. Par le théorème de Baire, il existe N tel que NB contient une boule ouverte $B(x', \varepsilon')$. En divisant par N, nous obtenons une boule ouverte $B(x_0, \varepsilon_0)$ contenue dans B, où $x_0 = x'/N$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon'/N$.

L'ensemble B e

$$\begin{aligned} x \in B \Rightarrow \ \ \forall i \ \ \|T_i(-x)\| = \|T_i x\| \leqslant 1 \ \ \Rightarrow -x \in B; \\ x, y \in B, t \in [0,1] \ \ \Rightarrow \ \ \forall i \ \ \|T_i\big(tx + (1-t)y\big)\| \leqslant t\|T_i x\| + (1-t)\|T_i y\| \leqslant 1 \\ \Rightarrow tx + (1-t)y \in B. \end{aligned}$$

Il contient donc

$$B(0, \varepsilon_0) = \big\{\frac{1}{2}\big(x_1 + x_2\big) : x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0), \ \ x_2 \in B(-x_0, \varepsilon_0)\big\}$$

$\big($tout $z \in B(0, \varepsilon_0)$ e $\frac{1}{2}(x_0 + z) + \frac{1}{2}(-x_0 + z)\big)$.

——————— (fin du cours 14) ———————

Pour tout $x \in B(0,1)$ nous avons $\varepsilon_0 x \in B(0, \varepsilon_0)$, donc pour tout $i \in I$

$$\|T_i x\| = \frac{1}{\varepsilon_0}\|T_i(\varepsilon_0 x)\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

On peut donc conclure que pour tout i

$$\|T_i\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|T_i x\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0},$$

ce qui démontre le théorème. □

Remarque 3.2.10. *Il e* T_i *soient suppo*
continue

l'ensemble B *e*

seule fonctionnelle linéaire discontinue $T : E \to \mathbb{C}$ *(ou dans* $\mathbb{R}$*)* : $T(x)$
e x*, mais la norme de* T *n'e*

A rappeler, l'existence de fonctionnelle
montre, par exemple, par l'existence de base

Remarque 3.2.11. *La preuve utilise la complétude de* E*, mais pas celle de* F*. Le théorème re* F *d'être qu'un*
e

Une application importante concerne le

Pro 3.2.12. *Soit* E, F, G *de* $B : E \times F \to G$ *une application bilinéaire : pour tout* $x \in E$ *et tout* $y \in F$*, le applications* $B_x = B(x, \cdot)$ *et* $B^y = B(\cdot, y)$ *sont linéaire* E *et* F *dans* G *re*

Si B_x*,* B^y *sont borné* $x \in E$*,* $y \in F$*, alors* B *e*
il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$*,* $y \in F$

$$\|B(x, y)\| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|.$$

Démonstration. Notons D la boule unité dans F. On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus aux applications $\{B^y : y \in D\}$: pour chaque $x \in E$, on a par l'hy

$$\sup_{y \in D} \|B^y(x)\| = \sup_{y \in D} \|B_x(y)\| = \|B_x\| < \infty.$$

Il existe donc $C > 0$ tel que $\|B^y\| \leqslant C$ pour tout $y \in D$. Pour $x \in E$ et $y \in D$ on a alors

$$\|B(x, y)\| = \|B^y(x)\| \leqslant C\|x\|.$$

Pour tout $y \in F$ non-nul nous avons $y/\|y\| \in D$ et

$$B(x, y) = \|y\| B\big(x, \frac{y}{\|y\|}\big) = \|y\| B^{y/\|y\|}(x)$$

où $y/\|y\| \in D$, donc finalement pour tout $x \in E$, $0 \neq y \in F$

$$\|B(x, y)\| = \|y\|\,\|B^{y/\|y\|}(x)\| \leqslant \|y\| C \|x\|.$$

$\square$

Ce fait e

Exemple 3.2.13. Soit H un e T un o linéaire sur H, a priori non borné. Si T e $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour tout $x, y \in H$, alors il e

Pour le voir, on considère $B : (x, y) \mapsto \langle Tx, y\rangle$ comme une application bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x, on a dans le de la pro

$$\|B_x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |B(x,y)| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle Tx, y\rangle| \leqslant \|Tx\|,$$

et de même $\|B^y\| \leqslant \|Ty\|$ pour tout $y \in H$. En appliquant la pro tion, on obtient $C > 0$ tel que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leqslant C\|x\|\,\|y\|$$

pour tout $x, y \in H$, d'où $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ donc T e

Un cas particulier suivant e

Théorème 3.2.14. *Soient E, F de (T_n) e suite d'o E dans F simplement convergente :*

$$\forall x \in E \;\; \exists \lim_{n\to\infty} T_n x = Tx,$$

alors l'application T e

Démonstration. La linéarité de T e

Soit $x \in E$. La suite $(T_n x)$ étant convergente, la suite de $(\|T_n x\|)$ converge aussi, vers $\|Tx\|$, en particulier, elle e o (T_n) vérifient donc le Steinhaus et $C = \sup_n \|T_n\| < \infty$. Pour tout $x \in E$ on a

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant C\|x\|,$$

ce qui démontre le théorème. □

Exemple 3.2.15. (non fait) Soit (u_n) une suite de réel pour toute suite $(x_n) \in c_0$ la série $\sum x_n u_n$ converge. Alors $u \in \ell^1$.

Pour le voir, définissons le $\varphi_N : c_0 \to \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, par $\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N x_n u_n$. Elle $\|\varphi_N\| \leqslant \sum_{n=0}^N |u_n|$. Pour tout $x \in c_0$, par l'hy

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n u_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, l'application limite e
née. On peut utiliser la de c_0 pour conclure
que $u \in \ell^1$.

Le dernier théorème a aussi un corollaire suivant :

Pro 3.2.16. Soient E, F de
$B(E,F)$ d'o
En particulier, si E e E^*
e

Démonstration. Si (T_n) e $B(E,F)$, alors pour tout $x \in E$ la suite $(T_n x)$ e $\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \, \|x\| \to 0$, $n, m \to \infty$. Elle converge car F e
théorème précédent, l'application limite e
L'e E^* e $B(E, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ e
dans E, il e □

Dans le
dual, qui caractérise la convergence simple ; dans cette to E^*
e
Steinhaus.

3.2.4 Théorème de Hahn-Banach

Ce théorème a de

Théorème 3.2.17. Soit E un e $F \subset E$ un
sous-e $\varphi : F \to \mathbb{R}$ e
linéaire bornée. Alors on peut la prolonger à tout l'e E en
pré

Démonstration. Le théorème n'a du sens que si φ e
divisant par $\|\varphi\|$, on peut suppo $\|\varphi\| + 1$.

(fin du cours 15)

1 Montrons qu'on peut prolonger φ à un sous-e
dimension de plus. Si $F = E$, il n'y a rien à montrer. Sinon soit $y \in E \setminus F$. Un prolongement de φ sur $F \oplus \mathbb{R}y$ aura la forme $\varphi(x+ty) = \varphi(x) + t\alpha$, avec un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche α tel que ce prolongement ait la norme 1, c'e $x \in F$, $t \in \mathbb{R}$ on doit avoir

$|\varphi(x)+t\alpha| \leqslant \|x+ty\|$. Avec $t=0$, l'inégalité e
cette condition e

$$|\alpha+\varphi(x)/t| \leqslant \|y+x/t\| \text{ pour tout } x \in F, t \in \mathbb{R}^*.$$

Le x/t parcourent F tout entier, alors c'e
$|\alpha+\varphi(v)| \leqslant \|y+v\|$ ou encore à

$$-\|y+v\| \leqslant \alpha+\varphi(v) \leqslant \|y+v\| \text{ pour tout } v \in F.$$

Donc α doit vérifier

$$-\|y+v\|-\varphi(v) \leqslant \alpha \leqslant \|y+v\|-\varphi(v) \text{ pour tout } v \in F,$$

et c'e

$$\sup_{u\in F}[-\|y+u\|-\varphi(u)] \leqslant \alpha \leqslant \inf_{v\in F}[\|y+v\|-\varphi(v)].$$

Pour tout $u, v \in F$

$$\begin{aligned}\|y+v\|-\varphi(v)-[-\|y+u\|-\varphi(u)] &= \|-(y+v)\|+\|y+u\|-\varphi(u-v)\\ &\geqslant \|y+u-(y+v)\|-\varphi(u-v) = \|u-v\|-\varphi(u-v) \geqslant 0,\end{aligned}$$

donc un tel α existe, et il donne le bon prolongement.

2 Le prolongement sur E e
L'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ consistera de paire (L,ψ) où $L \subset E$ e
e F, et $\psi : L \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire de norme 1 prolongeant φ, c'e $\psi|_L = \varphi$. L'ordre e
$(L,\psi) \leqslant (L',\psi')$ si $L \subset L'$ et $\psi'|_L = \psi$.

Soit $\mathcal{C}$ une chaine dans $\mathcal{E}$. On po $M = \cup_{(L,\psi)\in\mathcal{C}} L$. Pour tout $x \in M$, il existe L tel que $x \in L$; po $\xi(x) = \psi(x)$ où ψ e $(L,\psi) \in \mathcal{C}$. Cette valeur e $x \in L'$ pour une autre paire $(L',\psi') \in \mathcal{C}$: soit $L \subset L'$, et alors ψ' e ψ, soit à l'inverse. On a aussi $|\xi(x)| \leqslant \|x\|$. Donc $(M,\xi) \in \mathcal{E}$, et par construction c'e majorant de $\mathcal{C}$.

Le
une paire (L,ψ) maximale dans $\mathcal{E}$. Si on avait $L \neq E$, on pourrait prolonger ψ à un sous-e
prolongement donnerait une paire strictement plus grande dans $\mathcal{E}$. Ce n'e $L = E$ et nous avons trouvé le prolongement recherché. □

On en déduit la version complexe :

Théorème 3.2.18. *Soit E un e*

$F \subset E$ un sous-e $\varphi : F \to \mathbb{C}$ *e*

fonctionnelle linéaire bornée. Alors on peut la prolonger à tout l'e

pace E en pré

Démonstration. On peut suppo $\|\varphi\| = 1$.

Pour tout $x \in F$, on décompo

$\varphi(x) = \psi(x) + i\xi(x)$. Le ψ, ξ sont alors linéaire

norme $\leqslant \|\varphi\|$. On peut considérer E comme un e

Par le précédent, il existe un prolongement $\tilde{\psi}$ de ψ à E qui a la même norme. On po $x \in E$

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\psi}(x) - i\tilde{\psi}(ix).$$

Cette fonctionnelle e $\mathbb{R}$-linéaire. En calculant $\tilde{\varphi}(ix) = \tilde{\psi}(ix) - i\tilde{\psi}(-x) = i\tilde{\psi}(x) - i(i\tilde{\psi}(ix)) = i\tilde{\varphi}(x)$, on voit que $\tilde{\varphi}$ e $\mathbb{C}$-linéaire. Il re $x \in E$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\varphi}(x)e^{-it} \in \mathbb{R}$, alors

$$|\tilde{\varphi}(x)| = |\tilde{\varphi}(e^{-it}x)| = |\tilde{\psi}(e^{-it}x)| \leqslant \|e^{-it}x\| = \|x\|,$$

ce qui termine la preuve. □

(fin du cours 16)

L'un de

Corollaire 3.2.19. *Soit E un e* $x \in E$ *non-nul. Alors il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) = \|x\|$ et $\|\varphi\| = 1$.*

Démonstration. Sur l'e $\mathbb{K}x$, où $\mathbb{K}$ e

laire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la fonctionnelle $\varphi(tx) = t\|x\|$ e

On peut la prolonger à E en pré □

Tout $x \in E$ peut être considéré comme une fonctionnelle linéaire sur E^*, qui e $x : \varphi \mapsto \varphi(x)$. Elle e

$|\varphi(x)| \leqslant \|x\|_E \, \|\varphi\|$.

Théorème 3.2.20. *L'inclusion canonique $E \to E^{**}$ e*

Démonstration. Il e $\|x\|_{E^{**}} \leqslant \|x\|_E$. Au même temps, il existe $\varphi_x \in E^*$ tel que $\|\varphi_x\| = 1$ et $|\varphi_x(x)| = \|x\|_E$, donc

$$\|x\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| \geqslant |\varphi_x(x)| = \|x\|_E.$$

Finalement, $\|x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. $\square$

Chapitre 4

Algèbre

Définition 4.0.1. *Soit A un e* *A e*
une algèbre de Banach si A e
ciative) telle que $\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$ pour tous $a, b \in A$.

Remarque : on n'obtient pas de notion plus générale en suppo
la multiplication uniquement continue, ou même sé
(Exercice.)

Exemple 4.0.2. *
- L'exemple ty* *$B(E)$ d'o*
linéaire *E.*
- *En dimension finie, $B(E) = M_n(\mathbb{C})$.*
- *Un autre exemple e $C(K)$ où K e*
- *$L^1(\mathbb{R})$ avec la convolution (cours d'Analy*
8) e

Soit A une algèbre de Banach unifère.

Théorème 4.0.3. *Si $a \in A$ e* *$\|a\| < 1$, alors $1 - a$ e*
sible et son inverse e

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|},$$

donc la série converge normalement. Pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$(1 - a) \sum_{n=0}^{N} a^n = \sum_{n=0}^{N} a^n (1 - a) = 1 - a^{N+1} \to 1,$$

ce qui montre que la somme e $(1-a)^{-1}$. □

Corollaire 4.0.4. *L'ensemble de* $Inv(A)$ *e*
A, *et l'o* $a \mapsto a^{-1}$ *e*

Démonstration. Si $a \in Inv(A)$ et $\|h\| < 1/\|a^{-1}\|$, alors

$$a - h = a(1 - a^{-1}h)$$

avec $\|a^{-1}h\| < 1$, donc $a - h$ e

$$(a-h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}h\right)^n a^{-1}.$$

Cela montre que $Inv(A)$ e

$$\begin{aligned} \|(a-h)^{-1} - a^{-1}\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{-1}h\right)^n a^{-1} \Big\| < \sum_{n=1}^{\infty} \|h\|^n \|a^{-1}\|^{n+1} \\ &= \|h\| \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|h\|\,\|a^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que $1 - \delta\|a^{-1}\| > 1/2$ et $2\delta\|a^{-1}\|^2 < \varepsilon$, alors $\|h\| < \delta$ impliquera $\|(a-h)^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$. □

Définition 4.0.5. *Le spectre d'un élément* $a \in A$ *e*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ n'e} \qquad \}.$$

Exemple 4.0.6. *Dans* $A = M_n(\mathbb{C})$*, une matrice* a *e*
$\det a \neq 0$*, le spectre e*
ractéristique $P(\lambda) = \det(a - \lambda)$*. Ce sont exactement le*
de a*. À chaque valeur pro* λ *il corre*
pro x *tel que* $ax = \lambda x$*.*

Exemple 4.0.7. *Dans* $A = C(K)$ *où* K *e*
f *e*

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall x \in K \;\; f(x) \neq \lambda\} = f(K).$$

Dans la dimension infinie, on distingue le spectre ponctuel qui consiste de
vide : on sait bien que pour qu'un o $T \in B(E)$ soit inversible, même si E e $\ker T = \{0\}$ mais il faut aussi que T soit surjectif.

(fin du cours 17)

Théorème 4.0.8. *Le spectre de tout élément d'une algèbre de Banach unifère e* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $|\lambda| > \|a\|$, alors $a-\lambda = -\lambda(1-a/\lambda)$ avec $\|a/\lambda\| < 1$, donc $a - \lambda$ e $\lambda \notin \sigma(a)$.

Si $\lambda \notin \sigma(a)$, alors $a - \lambda \in Inv(A)$, et comme cet ensemble e il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a-\lambda+h \in Inv(A)$ dè $\|h\| < \varepsilon$. En particulier, $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ implique $a - \mu \in Inv(A)$ donc $B(\lambda, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. On conclut que $\sigma(a)$ e □

Exemple 4.0.9. *Soit* (a_n) *une suite dense dans le disque unité fermé* $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. *On peut prendre par exemple le disque dont toute* ℓ_2, *on po*

$$T(x_n) = (a_n x_n).$$

Pour tout $x \in \ell_2$, *on a*

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_n |a_n x_n|^2 \leqslant \sum_n |x_n|^2 = \|x\|_2^2,$$

donc $Tx \in \ell_2$ *; cette application e même calcul elle e* $\|T\| \leqslant 1$. *Il en suit en particulier que* $\sigma(T) \subset \bar{D}$ *(on considère le spectre dans* $B(\ell_2)$.

Soit (e_n) *la base canonique de* ℓ_2 *:* $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. *On a* $Te_n = a_n e_n$, *donc chaque* a_n *e* e_n *un vecteur pro Toute* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(T)$. *Mais le spectre e*

$$\sigma(T) \supset \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = \bar{\mathbb{D}}.$$

Avec l'inclusion obtenue plus haut, on obtient $\sigma(T) = \bar{D}$.

Ré : L'application $\lambda \mapsto R_\lambda = (a-\lambda)^{-1}$, définie sur $\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$, e a. Par Corollaire 4.0.4, elle e Pour toute fonctionnelle linéaire $\varphi \in A^*$, on po $f(z) = \varphi\big((a-z)^{-1}\big)$, c'e $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ on calcule

$$f(w) - f(z) = \varphi\big((a-w)^{-1} - (a-z)^{-1}\big) = \varphi\big((a-w)^{-1}(w-z)(a-z)^{-1}\big),$$

donc, par la continuité de l'inverse, il existe

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \varphi\big((a-w)^{-1}(a-z)^{-1}\big) = \varphi\big((a-z)^{-2}\big).$$

La fonction f e $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ au sens complexe, c'e
à-dire holomorphe (le cours d'analy
consacré à de telle

Si $|z| > \|a\|$, alors

$$(a-z)^{-1} = -\big[z(1-a/z)\big]^{-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n},$$

donc, par continuité,

$$f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(a^n)}{z^n}. \tag{4.1}$$

On aura be φ :

$$g(z) = \varphi\big((1-za)^{-1}\big) = -\frac{1}{z}\varphi\big((a-1/z)^{-1}\big) = -\frac{1}{z}f(1/z).$$

Pour $0 < |z| < 1/\|a\|$, par (4.1), elle se décompo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(a^n)z^n, \tag{4.2}$$

l'égalité re $z = 0$. Par compo g e $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}^* \setminus \{1/z : z \in \sigma(a)\}$. Dans le disque $\{z : |z| < 1/\|a\|\}$ contenant 0 elle e
$\mathbb{C}$-dérivable en 0.

Théorème 4.0.10. *Le spectre de tout élément d'une algèbre de Banach unifère e*

Démonstration. Vers l'ab $\sigma(a)$ e
fonctionnelle linéaire $\varphi \in A^*$, la fonction f définie ci-de
définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$. Elle e $|z| > \|a\|$, alors par (4.1)

$$|f(z)| \leqslant \|\varphi\|\frac{1}{|z|(1-\|a\|/|z|)} = \frac{\|\varphi\|}{|z|-\|a\|} \to 0, \quad z \to \infty,$$

et elle e $\{z : |z| \leqslant \|a\|\}$ par continuité. Par le théorème de Liouville (cours d'analy f e
Mais sa limite à l'infini e $f \equiv 0$.

Nous obtenons alors que sur l'élément non-nul $(a-z)^{-1}$ toute fonctionnelle
de Hahn-Banach (corollaire 3.2.19). Cette contradiction démontre le théorème. □

Théorème 4.0.11. *Soit $a \in A$. Pour tout polynôme p, on a*

$$\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Démonstration. Soit $n = \deg p$. Pour tout λ on a $p(z) - \lambda = c(z - z_1)\dots(z - z_n)$ avec $c \neq 0$ et certains $z_n \in \mathbb{C}$. Alors $p(a) - \lambda = c(a - z_1)\dots(a - z_n)$; c'e inversible ssi chaque terme e $z_j \notin \sigma(a)$, $j = 1, \dots, n$. Le $z_j \in \sigma(a)$ pour un certain j. On aura alors $p(z_j) - \lambda = 0$, donc $\lambda \in p\big(\sigma(a)\big)$.

Reciproquement, $\lambda = p(z_0)$ avec $z_0 \in \sigma(a)$ fera que $p(z) - \lambda$ s'annule en z_0 donc se divise par le facteur $z - z_0$ tel que $a - z_0$ n'e inversible ; on aura donc $p(a) - \lambda$ non-inversible et $p(z_0) \in \sigma\big(p(a)\big)$. □

(Vrai dans toute algèbre unitale, même sans norme / to

Définition 4.0.12. *Soit $a \in A$. Le rayon spectral de a e* $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Il suit du théorème 4.0.10 que $\rho(a) \leqslant \|a\|$.

(fin du cours 18)

Théorème 4.0.13. *Pour tout a, la limite suivante existe et vérifie l'égalité :*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Démonstration. Il e $\rho(a) \leqslant \|a\|$. Par Théorème 4.0.11, $\rho(a^n) = \rho(a)^n$, donc

$$\rho(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}. \tag{4.3}$$

Soit $\varphi \in A^*$ et $g(z) = \varphi((1 - za)^{-1})$, $z \in \mathbb{C}$. Comme discuté précédemment, g e $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe) sur le complément de l'ensemble $\{1/z : z \in \sigma(a)\}$; en particulier, sur le disque ouvert $V = \{z : |z| < 1/\rho(a)\}$. Il en suit (c'e V tout entier, et non seulement sur le disque $|z| < 1/\|a\|\}$, la fonction g e

Pour $z \in V$, on a alors $\varphi(a^n)z^n = \varphi\big((za)^n\big) \to 0$, $n \to \infty$. Considérons cette suite comme le $(za)^n \in A^{**}$ sur $\varphi \in A^*$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, l'ensemble $\{(za)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e par la même constante C dans A^{**}. Par le théorème 3.2.20, $\|(za)^n\|_A \leqslant C$ pour tout n, d'où

$$|z| \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1.$$

Cette inégalité vaut pour tout $z \in V$ donc en passant à la borne supérieure on obtient

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|a^n\|^{1/n} \leqslant \rho(a).$$

En le combinant avec l'inégalité (4.3), on conclut que la limite suivante existe, et

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(a^n)|^{1/n} = \rho(a).$$

□

Chapitre 5

O

5.1 Généralité

Définition 5.1.1. *Soit* E, F *de* $T : E \to F$
un o T *e*
la boule unité $B = B(0,1)$ *dans* E *e* F ;
autrement dit, si $\overline{T(B)}$ *e*

On pourrait définir de
mé
saire

Exemple 5.1.2. $\star$ *L'o* $I : E \to E$ *sur un e*
de Banach E *e* E *e*
$\star$ *Si* $T(E)$ *e* T *e*
$\star$ *Sur un e*

Voici un exemple

Exemple 5.1.3. *Soit* $I = [a,b]$, $E = F = C(I)$ *et* k *une fonction continue sur* I^2. *On po* $f \in E$ *et* $x \in I$

$$Tf(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy.$$

Il e T *e*

$$\|Tf\|_\infty \leqslant \int_a^b \|k\|_\infty \|f\|_\infty dy = (b-a)\|k\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Soit B *la boule unité dans* E. *Alors* $T(B)$ *e*
e k *e* I^2 *donc*

uniformément continue ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, en particulier,

$$\sup_{x_1, x_2 \in I} |k(x_1, y) - k(x_2, y)| dy < \varepsilon.$$

Pour $f \in B$ et $x_1, x_2 \in I$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$ nous avons alors

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| \leqslant \int_a^b |k(x_1, y) - k(x_2, y)|\, |f(y)| dy \leqslant \varepsilon(b-a)\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon(b-a),$$

ce qui démontre l'équicontinuité. Par le théorème d'Arzelà-A $T(B)$
e $E = F$ et T e

Par de T e
en tant qu'o $L^2[a, b]$.

Pro 5.1.4. Un o $T : E \to F$ entre de
Banach E, F e (x_n) il existe une suite extraite (n_{n_k}) telle que (Tx_{n_k}) converge dans F.

Démonstration. Suppo T e $C =$
$\sup_n \|x_n\|$ si be $x_n \in B$ pour tout n. La suite (Tx_n) dans le compact $\overline{T(B)}$ admet une sous-suite convergente.

Réciproquement, si T vérifie cette pro $\overline{T(B)}$ e
pact. □

Pro 5.1.5. L'ensemble $K(E, F)$ de
de E et F e

Démonstration. Soit B la boule unité de E. Si $T \in K(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda T)(B) = \lambda T(B)$ e $\lambda T \in K(E, F)$. Si $T, S \in K(E, F)$, alors de toute suite bornée (x_n) dans E on peut extraire une sous-suite $y_k = x_{n_k}$ telle que Ty_k converge, vers $y \in F$; on extrait ensuite une sous-suite $z_l = y_{k_l}$ telle que Sz_l converge, vers $z \in F$. Finalement,

$$(T + S)(x_{n_{k_l}}) = Ty_{k_l} + Sz_l \to y + z.$$

Par la pro $T + S$ e

Suppo $T_n \in K(E, F)$ et $\|T - T_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Une façon de montrer la compacité de T e
choisissant de (x_n) telle que $T_n x_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_1(n)}$ converge pour tout n. Mais on peut aussi le faire autrement.

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_N - T\| < \varepsilon$. L'ensemble $T_N(B)$ e ε-ré F pour $T_N(B)$: $\{y_1, \dots, y_m\} \subset F$ tel $T_N(B) \subset \cup_{k=1}^{m} B(y_k, \varepsilon)$. Si $x \in B$ et k e $\|T_N x - y_k\| < \varepsilon$, alors

$$\|Tx - y_k\| \leqslant \|(T - T_N)x\| + \|T_N x - y_k\| < 2\varepsilon,$$

alors $T(B) \subset \cup_{k=1}^{m} B(y_k, 2\varepsilon)$. Cela montre que $T(B)$ admet un ε-ré fini pour tout $\varepsilon > 0$ donc il e □

———————— (fin du cours 19) ————————

Corollaire 5.1.6. *Si T agissant entre de limite d'une suite d'o*

Pro 5.1.7. *Soient E, F, G de T e compact et A e AT et TA sont compact de définition sont coordonné*

Démonstration. Soit $T \in K(E,F)$ et $A \in B(F,G)$. Toute suite bornée (x_n) admet une sous-suite $y_k = x_{n_k}$ telle que Ty_k converge ; mais alors ATy_k converge aussi, par la continuité de A.

Si $T \in K(F,G)$ et $A \in B(E,F)$, alors pour toute suite bornée (x_n) la suite (Ax_n) e $y_k = Ax_{n_k}$ telle que Ty_k converge ; alors $Ty_k = TAx_{n_k}$ converge, et TA e compact. □

Corollaire 5.1.8. *Si T e Banach de dimension infinie, alors T n'e*

Démonstration. Si T était inversible, l'o $I = TT^{-1}$ serait compact, ce qui e □

5.2 Le spectre d'un o

Lemme 5.2.1 (de Rie . *Soit E un e $F \subset E$ un sous-e $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E \setminus F$ «pre F : tel que $\|x\| = 1$ et dist$(x, F) > 1 - \varepsilon$.*

Démonstration. On choisit $y \in E \setminus F$ quelconque et trouve $z \in F$ tel que $\mathrm{dist}(y, F) > (1 - \varepsilon)\|y - z\|$. Il re $x = (y - z)/\|y - z\|$. □

Dans la suite, E e

Lemme 5.2.2. *Soit $T \in K(E)$, alors la suite d'e* $E_n = (T-I)^n E$ *se stabilise : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $E_N = E_n$ pour tout $n \geqslant N$.*

Démonstration. Il e $E_n \subset E_m$ si $n \geqslant m$. Suppo cette suite ne se stabilise pas, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n il existe $x_n \in E_n \setminus E_{n+1}$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_n, E_{n+1}) > 1-\varepsilon$. Pour $m > n$ on a

$$Tx_n - Tx_m = (T-I)x_n - (T-I)x_m + x_n - x_m \in x_n + E_{n+1},$$

donc $\|Tx_n - Tx_m\| > 1-\varepsilon$. La suite (Tx_n) n'admet donc pas de sous-suite de Cauchy, ce qui contredit la compacité de T. □

Théorème 5.2.3 (Alternative de Fredholm). *Soit $T \in K(E)$, alors $T-I$ e* $\ker(T-I) \neq \{0\}$, *soit $T - I$ e*

Démonstration. Soit, comme dans le lemme, $E_n = (T-I)^n E$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $E_N = E_n$ pour tout $n \geqslant N$.

Suppo $S = T - I$ e $E_1 = E$, alors S e et par le théorème de l'o alors en vue d'une contradiction qu'il existe $x \in E \setminus S(E)$. On a $S^N x \in E_N = E_{N+1}$, donc il existe $y \in E$ tel que

$$S^N x = S^{N+1} y \;\;\Rightarrow\;\; S^N(x - Sy) = 0.$$

Par l'hy $x \notin S(E)$ donc $z = x - Sy \neq 0$. Vu que $S^N z = 0$, il existe $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $S^k \neq 0$ et $S^{k+1} = 0$. Le vecteur $S^k z \neq 0$ e donc dans l'e $\ker S$ qui e que S e

Pour la réciproque, suppo S e Soit $x_0 \ker S$ non nul. Par la surjectivité, on peut choisir une suite (x_n) telle que $Sx_n = x_{n-1}$, $n \geqslant 1$. On a alors $S^n x_n = x_0 \neq 0$ mais $S^{n+1} x_n = 0$, donc tous le $Z_n = \ker S^n$ sont différent une fois le lemme de Rie n, il existe $y_n \in S_n$ de norme 1 tel que $\mathrm{dist}(y_n, S_{n-1}) > 1/2$, et on obtient pour tout $m < n$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|y_n + Sy_n - y_m - Sy_m\| \geqslant \mathrm{dist}(y_n, Z_{n-1}) > 1/2,$$

ce qui contredit la compacité de T. Cela montre que S e □

On peut en déduire une de
rateur compact :

Théorème 5.2.4. *Soit T un o*
Banach E.

1. *Tout point $\lambda \neq 0$ dans $\sigma(T)$ e*
2. *L'e*
3. *Pour tout $\delta > 0$, il existe un nombre fini de $\lambda \in \sigma(T)$ avec $|\lambda| \geqslant \delta$.*
4. *Le spectre $\sigma(T)$ e*

Démonstration. 1. Soit $\lambda \neq 0$ et $R = \lambda^{-1}(T - \lambda I) = \lambda^{-1}T - I$. Comme $\lambda \in \sigma(T)$, l'o R n'e
$\ker R \neq \{0\}$. Il existe alors un vecteur non-nul $x \in \ker R$, qui e T : on a $Tx = \lambda(Rx + x) = \lambda x$.

2. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur pro T et $Z = \ker(T - \lambda)$. Si B e la boule unité de E et B_0 celle de Z, alors $T(B_0) \subset T(B)$ e précompacte. Pour tout $x \in B_0$ on a $Tx = \lambda x$, donc $x = \lambda^{-1}Tx$ donc $B_0 = \lambda^{-1}T(B_0)$ e Z e de dimension finie.

3. S'il existe un nombre infini $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs pro
de T avec $|\lambda_n| \geqslant \delta > 0$, alors il existent de
$x_n \in E$ tel $Tx_n = \lambda_n x_n$; on peut le
Le (x_n) sont libre
évidemment $x_0 \neq 0$; ensuite, si $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ sont libre $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k$, alors

$$Tx_n = \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k T x_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k x_k = \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k,$$

d'où $c_k \lambda_k = c_k \lambda_n$ pour tout k, et comme $\lambda_k \neq \lambda_n$ pour $k < n$, on a $c_k = 0$ d'où $x_n = 0$, ce qui e x_n ne s'ex

Soit E_n l'e $\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Par le précédent, $E_n \neq E_{n+1}$ pour tout n. Par le lemme de Rie
choisit pour chaque $n \geqslant 0$ un vecteur $y_n \in E_n$ tel que $\|y_n\| = 1$ et $\mathrm{dist}(y_n, E_{n-1}) > 1/2$. Avec ce choix, on a $y_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_k$ et $y_n - c_{nn} x_n \in E_{n-1}$, donc

$$T(y_n/\lambda_n) = \lambda_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} \lambda_k x_k = c_{nn} x_n + z_n = y_n + z'_n$$

avec $z_n, z'_n \in E_{n-1}$. On peut alors minorer pour $m < n$

$$\|T(y_n/\lambda_n) - T(y_m/\lambda_m)\| = \|y_n + z'_n - y_m - z'_m\| \geqslant \mathrm{dist}(y_n, E_{n-1}) > 1/2.$$

La suite (y_n/λ_n) e $1/\delta$, mais (Ty_n) n'admet pas de sous-suite de Cauchy : une contradiction qui montre le (3).

4. C'e

tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre fini (peut-être nul) de point $\lambda \in \sigma(T)$ tel $|\lambda| > 1/n$, donc $\sigma(T)$ e

Dans le deuxième cas, on l'énumère en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a par définition $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$.

□

On peut en tirer encore un corollaire :

Corollaire 5.2.5. *On peut énumérer le* T *en ordre de* $|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant \ldots$. *Parfois c'e*

tions corre

e

Exemple 5.2.6 (non fait en cours). *Considérons l'o*

terra : pour $f \in C[0,1]$,

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Il e

du noyau continu : pour vérifier que l'ensemble $\{Tf : \|f\|_\infty < 1\}$ *e*

équicontinu, on calcule

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| = \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(y)dy \Big| \leqslant \|f\|_\infty |x_2 - x_1| \leqslant |x_2 - x_1|.$$

On peut ensuite majorer

$$|Vf(x)| \leqslant \|f\|_\infty \Big| \int_0^x 1dt = x\|f\|_\infty,$$

et puis par récurrence montrer que $|V^n f(x)| \leqslant \|f\|_\infty x^n/n!$:

$$|V^n f(x)| \leqslant \int_0^x |V^{n-1} f(t)|dt \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1}dt = \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty.$$

On a donc $\|V^n\| \leqslant 1/n!$, *et pa la formule du rayon spectral*

$$\rho(V) = \lim_{n\to\infty} \|V^n\|^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty} e^{-\ln(n!)/n} = 0,$$

car

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k \geqslant \frac{1}{n}\int_1^n \ln x dx = \frac{1}{n}\big[x(\ln x - 1)\big]_1^n \sim \ln n \to +\infty$$

quand $n \to +\infty$. Le spectre de V e $\{0\}$.

5.3 O

Rappel : si T e
Hilbert H, on définit son adjoint T^* par

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

pour tout $x, y \in H$: c'e
car $y \mapsto \langle x, Ty\rangle$ e
linéaire et borné de norme $\|T^*\| = \|T\|$:

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\|=1}\|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\langle T^*x, y\rangle = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\langle x, Ty\rangle = \|T\|.$$

Pro 5.3.1. *Un o* T *sur un e*
de Hilbert H *e* T^* *e*

Démonstration. Comme $T^{**} = T$, il suffit de montrer l'implication directe. Soit T compact, alors $K = \overline{T(B)}$ e B e
boule unité. Chaque $x \in H$ définit une fonction continue $f_x : y \mapsto \langle x, y\rangle$ de H dans $\mathbb{C}$, alors sa re K. L'ensemble
$S = \{f_x : x \in B\}$ e $C(K)$: pour
tout $x \in B$

$$|f_x(y_1) - f_x(y_2)| = |\langle x, y_1 - y_2\rangle| \leqslant \|y_1 - y_2\|.$$

C'e $C(K)$, par le théorème d'Arzelà-
A $x_1, x_2 \in B$

$$\begin{aligned}\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_\infty &= \sup_{y\in K}|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y\in T(B)}|\langle x_1 - x_2, y\rangle| \\ &= \sup_{y\in B}|\langle x_1 - x_2, Ty\rangle| = \sup_{y\in B}|\langle T^*(x_1 - x_2), y\rangle| = \|T^*(x_1 - x_2)\|,\end{aligned}$$

donc $T^*(B)$ e $(x_n) \subset B$ on peut choisir une sous-suite (x_{n_k}) telle que $(f_{x_{n_k}})$ converge, et alors $(T^*(x_{n_k}))$ converge).
L'o T^* e □

Théorème 5.3.2. *Soit* T *un o*
e H. *Alors :*

⋆ *Le* T *sont réel*

⋆ *Le*

rente

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit E_λ l'e λ :

$$E_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}.$$

Si λ n'e $E_\lambda = \{0\}$. On note aussi que $\ker T = E_0$.

⋆ Tout $\lambda \in \sigma(T)$ non-nul e $x \in E_\lambda$ non-nul, comm $eT = T^*$,

$$\langle Tx, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \langle x, Tx\rangle = \bar{\lambda}\|x\|^2,$$

d'où $\lambda = \bar{\lambda}$.

⋆ Si $\lambda \neq \mu$ et E_λ, E_μ sont non-nul $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$ on a

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

donc $\langle x, y\rangle = 0$.

□

Théorème 5.3.3. *Soit* T *un o*
e H. *Alors*

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\|.$$

Démonstration. Notons $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. On a évidemment

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$$

et en particulier $\|T\| \geqslant M$. Pour tout $x, y \in H$

$$\langle T(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Tx, x\rangle \pm \big(\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle\big) + \langle Ty, y\rangle,$$

donc

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle Tx, x\rangle - \langle Ty, y\rangle \\ &= -\langle T(x-y), x-y\rangle + \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\big).$$

En écrivant la même égalité avec iy à la place de y, on obtient

$$-i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), x-iy\rangle\big),$$

et finalement

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \frac{1}{2}\big(\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle\big) - \frac{1}{2i}\big(-i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\big)\\ &\quad - \frac{1}{4i}\big(\langle T(x+iy), x+iy\rangle - \langle T(x-iy), x-iy\rangle\big).\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}|\langle Tx, y\rangle| &\leqslant \frac{1}{4}M\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\big)\\ &= \frac{M}{4}(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|iy\|^2) = M\end{aligned}$$

et donc $M = \|T\|$. □

Théorème 5.3.4. *Si T un o*
sur un e H*, alors il a une valeur pro*

Démonstration. Pour tout $x \in H$ le produit scalaire $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$ e

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Quitte à remplacer T par $-T$, on peut suppo $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\langle Tx, x\rangle$.

Choisissons une suite $(x_n) \subset H$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \|T\|$. Par la compacité de T, il existe une suite extraite $y_k = x_{n_k}$ telle que Ty_k converge vers une limite $z \in H$. Pour tout k

$$\begin{aligned}\|Ty_k - \|T\|y_k\|^2 &= \|Ty_k\|^2 - \|T\|\langle y_k, Ty_k\rangle - \|T\|\langle Ty_k, y_k\rangle + \|T\|^2\|y_k\|^2\\ &\to \|z\|^2 - 2\|T\|^2 + \|T\|^2 = \|z\|^2 - \|T\|^2.\end{aligned}$$

L'ex $\|z\| \geqslant \|T\|$. Au même temps,

$$\|z\| = \lim_{k\to\infty} \|Ty_k\| \leqslant \|T\|.$$

Donc $\|z\| = \|T\|$ et $Ty_k - \|T\|y_k \to 0$, donc $y_k \to z/\|T\|$. Maintenant

$$Tz = \|T\| \lim_k Ty_k = \|T\|z,$$

donc $z \neq 0$ e T. □

Théorème 5.3.5. *Soit T un o*
e H. *Alors :*

- *Il existe une base orthonormée $\{e_\alpha\}$ de H qui consiste de vecteurs pro* T *: pour tout α, $Te_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$.*
- *L'ensemble $\{\alpha : \lambda_\alpha \neq 0\}$ e* $\{e_n :$ $n \in \mathbb{N}\}$ *on a, pour tout $x \in H$,*

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Démonstration. ⋆ Par Théorème 5.2.4, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ e
nombrable. Pour tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, la dimension de l'e
pro E_λ e E_λ une base orthonormée (finie), et soit $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la réunion de ce
e E_λ
sont orthogonaux pour λ distinct $\{e_n\}$ e
orthonormée.

Soit E l'envelo $\{e_n\}$ (de sorte que $\{e_n\}$ e une base hilbertienne de E) et $Z = E^\perp$. Le sous-e Z e
T-invariant : si $x \in Z$, alors pour tout n

$$\langle Tx, e_n \rangle = \langle x, Te_n \rangle = \lambda_n \langle x, e_n \rangle = 0.$$

La re $R = T|_Z$ e
valeur pro
T aussi et le
l'un de E_λ, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, engendré $\{e_n\}$. Par Théorème 5.3.4, $R = 0$, donc $Z \subset \ker T$. On peut compléter $\{e_n\}$ par une base orthonormée de Z et obtenir une base $\{e_\alpha\}$ de H. Le $e_\alpha \in Z$ sont aussi pro T de valeur pro
0.

⋆ Soit P la pro E. Pour tout $x \in H$ on a $Tx = TPx$, et

$$Px = \sum_n \langle Px, e_n \rangle e_n = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Par continuité de T, on a maintenant

$$Tx = \sum_n \langle x, e_n \rangle Te_n = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

□

Bibliographie

[1] R. Engelking, General To
de Stone-Weierstrass)

[2] Kolmogorov, Fomin. (Arzelà-A

[3] A. Nou, Exercice
rème de Péano)

[4] Akhiezer, Glazman, O
pact